# Valószínűségszámítás és statisztika
**5. gyakorlat**
**2015. 10. 09.**

## Információ

### ZH

Jövő héten (2015.10.16-án) ZH. Helyszín, időpont: a gyakorlat helye és ideje.
Lehetőleg 12:15-re foglaljátok el a helyeiteket. Minél hamarabb készen álltok, annál több időtök marad a ZH-ra.
Mindenkinél legyen fényképes igazolvány (diákigazolvány, személyi igazolvány, jogosítvány, útlevél).
Ezen a ZH-n csak egy A4-es saját kézzel írott puska és nem programozható számológép használható. Jegyzet, könyv, tablet, telefon, laptop stb. nem. Az egymással és a külső személyekkel való kommunikáció semmiféle formában nem engedélyezett a ZH alatt.
Mindenki hozzon magával legalább 5 üres fehér lapot. Előttetek csak üres lap, az A4-es puska, számológép, íróeszköz, fényképes igazolvány és étel-ital maradhat. A kabátokat és a táskákat lehetőség szerint hagyjátok a ruhatárban.
Minden lapon szerepeljen a nevetek és a neptunkódotok. Lehetőleg minden feladatot külön oldalra írjatok. Törekedjetek a világos, jól olvasható leírásra. Csak arra tudok pontot adni, amit el tudok olvasni. A puszta eredményközlés nem sokat ér, a teljes, hibátlan levezetés ér maximális pontot (természetesen részpontszám is kapható).

### Konzultáció

Jövő héten csütörtökön (2015.10.15-én) 16:15-től ZH előtti konzultáció lesz. Helyszín: Északi Tömb 7.86.

## Elmélet

[ X val.változó eloszlásfüggvénye:] $F_X(x) = P(X < x)$. Amennyiben egyértelmű, melyik val.változó eloszlásfüggvényéről van szó, F(x)-et írunk.

[ Az eloszlásfüggvény tulajdonságai: ]
(I.) $0 \le F_X(x) \le 1$; (II.) monoton növő; (III.) balról folytonos; (IV.) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.

[ Tetszőleges X val.változó esetén: ] $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$; $P(a < X \le b) = F(b+) - F(a+)$.

[ Absz. folyt. val. vált. sűrűségfüggvénye: ] X val.változó abszolút folytonos, ha létezik olyan f(x) függvény, amelyre $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Ilyenkor f(x)-et *sűrűségfüggvény*nek hívjuk.
Legyen X abszolút folytonos eloszlású. Ekkor
f(x)=F'(x); f(x) $\ge 0$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$; $P(X = x) = 0$ $\forall x$-re; $P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

[ Nevezetes abszolút folytonos eloszlások: ]

| Eloszlás neve | Jelölése | Eloszlásfüggvény | Sűrűségfüggvény | EX | D$^2$X |
|---|---|---|---|---|---|
| Egyenletes | E$(a,b)$ | $\begin{cases} 0 & \text{ha } x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \le b \\ 1 & \text{ha } b < x \end{cases}$ | $\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a < x \le b \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ |
| Exponenciális | Exp$(\lambda)$ | $\begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x \ge 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$ | $\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \ge 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ |
| Standard normális | N$(0,1^2)$ | $\Phi(x) = ...$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $x \in \mathbb{R}$ | 0 | 1 |
| Normális | N$(m,\sigma^2)$ | ... | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ $x \in \mathbb{R}$ | m | $\sigma^2$ |

Személyes adatok:
Név: Bondici László
E-mail: bondici@cs.elte.hu
Honlap: www.cs.elte.hu/∼bondici

[ Abszolút folytonos val.változó várható értéke:] $EX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx.$

[ Abszolút folytonos val.változó $l$. momentuma: ] $EX^l = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^l f(x)\, dx.$

## Feladatok

1. Legyen $(p_n), n \geq 0$ a nemnegatív egész számokon egy valószínűségi eloszlás, melynek létezik a várható értéke. Sorsoljunk ki egy elemet ebből az eloszlásból. Dobjunk annyiszor egy szabálytalan érmével ($p$ a fej valószínűsége), mint ahányas számot kaptunk. Jelölje $X$ a fejek számát. $E(X) =?$

2. Legyen $X$ egyenletes eloszlású valószínűségi változó az $1, 2, \ldots, N$ elemeken. Számoljuk ki $X$ szórását.

3. (4. feladatsor, 9-es feladat) Legyen $0 < Y < 3$ valószínűségi változó. Eloszlásfüggvénye ezen az intervallumon $F(x) = cx^3$ alakú. Mennyi $c$ és $P(-1 < Y < 1)$?

4. (4. feladatsor, 10-es feladat) Eloszlásfüggvények-e a következő függvények?

   a) $F(x) = 1 - (\frac{c}{x})^a$, ha $x > c$, és 0 különben ($a, c > 0$);

   b)
   $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ \frac{[x]}{2}, & \text{ha } 0 < x < 2; \\ 1, & \text{ha } x \geq 2. \end{cases}$$

5. Az alábbi függvények közül melyek sűrűségfüggvények?

   a)
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{ha } 0 < x < 1; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

   b)
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x > 1; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

   c)
   $$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

6. Számoljuk ki a $[-1, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlás szórásnégyzetét.

7. Számoljuk ki a $\lambda$ paraméterű exponenciális eloszlás szórását.

## Házi feladat

1. a) Eloszlásfüggvény-e az $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \sin x$ függvény? És a $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, G(x) = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}$?

   b) Sűrűségfüggvény-e az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$, ha $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, és 0 különben függvény? Milyen $\alpha > 1$ valós számra lesz a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{2}{x^\alpha}$, ha $x > 1$, és 0 különben függvény sűrűségfüggvény?