6.3 Hipotézisvizsgálat

1. (a) n kísérlet esetén az elsőfajú hiba valószínűsége (felhasználva, hogy adott számú írás bekövetkezésének valószínűsége az $(n, 1/2)$ paraméterű binomiális eloszlásból kapható meg): $\alpha = (1/2)^n + n(1/2)^n$. Könnyű próbálgatással is megkapható az eredmény: $n = 8$ a legkisebb mintaelemszám, amire már teljesül $\alpha < 0{,}05$.
(b) $p > 0{,}5$ mellett a H_0 elutasításának a valószínűsége adja az erőfüggvényt. Ez az előzőhöz hasonlóan: $p^n + np^{n-1}(1-p)$.

2. (a) Mivel a H_1-ben a kicsi ϑ értékek vannak, ezért akkor döntünk a H_0 elutasítása mellett, ha $X_n^{(n)}$ kicsi, $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : X_n^{(n)} < c\}$ alakú. Az $X_n^{(n)}$ statisztika eloszlásfüggvénye $F_{n,\vartheta}(x) = x^{2n}/\vartheta^{2n}$ a $[0, \vartheta]$ intervallumon. Ebből H_0 esetén az $\mathcal{X}_k$ halmaz valószínűsége éppen $F_{n,1}(c)$, tehát akkor lesz a próba terjedelme 0,05, ha $c = F_{n,1}^{-1}(0{,}05)$, azaz $c = \sqrt[2n]{0{,}05}$.
(b) A próba erőfüggvénye

$$F_{n,\vartheta}(\sqrt[2n]{0{,}05}) = \frac{0{,}05}{\vartheta^{2n}}$$

ha $\vartheta > \sqrt[2n]{0{,}05}$, és 1 különben.
(c) Az előzőből $\frac{0{,}05}{0{,}5^{2n}} > 0{,}99$ kell, amiből $n > \frac{\log(0{,}0505)}{2\log(0{,}5)}$, azaz $n \geq 3$ adódik.

3. (a) Mivel a H_1 hipotézisben a nagy a értékek vannak, ezért az

$$\mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : X_1^{(n)} > c\}$$

választás a célszerű. Az $X_1^{(n)}$ statisztika eloszlásfüggvényére $1 - F_{n,a}(x) = e^{2n(a-x)}$ az (a, ∞) intervallumon. Ebből H_0 esetén az $\mathcal{X}_k$ halmaz valószínűsége éppen $1 - F_{n,1}(c)$, tehát akkor lesz a próba terjedelme 0,05, ha $c = (1 - F_{n,1})^{-1}(0{,}05)$, azaz $c = 1 + \frac{\log 20}{2n}$.
(b) A próba erőfüggvénye $e^{2n(a-c)}$, ha $a < c$, és 1 különben.

4. Az elsőfajú hiba akkor lép fel, ha a legnagyobb és a legkisebb sorszámú golyót is kihúzzuk. Ennek valószínűsége: 0,3.
Az erőfüggvény kiszámításához számítsuk ki a komplementer esemény – azaz a H_0 elfogadása – valószínűségét. Ez csak úgy lehet, hogy vagy

- 3 egymást követő számot húztunk ki ($n-2$ eset),
- 1 szám maradt ki (a maximum és a minimum különbsége 3), ez $2(n-3)$ eset.

Az erőfüggvény értéke tehát:

$$1 - \frac{3n-8}{\binom{n}{3}}.$$

5. A 2.47. feladat (b) részének megoldásában láttuk, hogy a

$$T(\mathbf{X}) = \frac{n\lambda(\overline{X} - \mu_0)^2}{\mu_0^2 \overline{X}}$$

statisztika eloszlása H_0 fennállása esetén χ_1^2. Ha H_0 nem teljesül, akkor Y inkább nagyobb értéket vesz fel, ezért a kritikus érték a χ_1^2-eloszlás $(1-\alpha)$-kvantilise, más szóval $c_\alpha = \left(\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)^2$, ahol Φ a standard normális eloszlásfüggvény. H_0-t tehát akkor vetjük el, ha $T(\mathbf{X}) > c_\alpha$.

6.3.1 Paraméteres próbák

6. (a) Ha a szórást ismertnek tételezzük fel, akkor u-próbát alkalmazhatunk. $\overline{X} = 15{,}4$ és így $u = -1{,}79$. A kritikus érték a standard normális eloszlás táblázatából $-1,64$-nek adódik, így elutasítjuk az edző állítását.
(b) A hipotézisek változatlanok, de ezúttal t-próbát kell alkalmaznunk. Mivel $s_5^* \to$ $s_4^* = 2$, ezért a próbastatisztika értéke változatlan: $t_4 = -1{,}79$. A kritikus érték viszont ezúttal $-2,132$, tehát az adott feltételek mellett nem tudjuk a H_0 hipotézist elutasítani.
Megjegyzés. A különbség oka az a bizonytalanság, amit a szórásnak a néhány megfigyelt értékből történő becslése hordoz. Ha ugyanis a tényleges szórás mégis nagyobb 2-nél, akkor az u-próbával sem tudnánk H_0-t elutasítani.
(c) Mivel a minták nem függetlenek (ugyanaz az 5 ember dobott kétszer), ezért egymintás próbát kell alkalmaznunk. Az eredeti hipotéziseink úgy fogalmazhatók meg, hogy H_0: $m_2 \le m_1$ (m_1 az első dobás várható értéke, m_2 pedig a második) és H_1: $m_2 > m_1$. (Az az állítás, hogy „nem jobb az edzés utáni eredmény" alkotja a H_0 nullhipotézist, hiszen ennek elutasítása esetén tudunk pozitív választ adni a feltett kérdésre.)
Az edzés eredményességére vonatkozó információ a két eredmény különbségében rejlik, ezért erre az új mintára az alábbi hipotéziseket kell vizsgálnunk: H_0': $m \le 0$, H_1' : $m > 0$, és a mintánk:

az eredmény javulása	3,2	-0,1	0,4	0,6	0,9

$\overline{X} = 1$, $s_n^{*2} = \sum_{i=1}^{5}(X_i - 1)^2/4 = (4{,}84+1{,}21+0{,}36+0{,}16+0{,}01)/4 = 1{,}645$. A próbastatisztika: $t_4 = \frac{\sqrt{5}\cdot\overline{X}}{s_5^*} = 1{,}74$, a táblázatban szereplő legkisebb kritikus érték pedig 2,776, ezért az az eredményünk, hogy nem szignifikáns az edzés hatása.

(d) Ugyan nem volt a javulás szignifikáns, de mégis az új mintára $\overline{Y} = 16{,}4$, ami azt mutatja, hogy ha például a két dobás átlagát tekintjük az egyes sportolók valós teljesítményének, akkor már egyik próba sem utasítja el a H_0-t, azaz maradhat az edző.

7. Mivel a minták nem függetlenek (ugyanaz a 10 ember futott kétszer), ezért egymintás próbát kell alkalmaznunk. Az eredeti hipotéziseink úgy fogalmazhatók meg, hogy
H_0: $m_2 = m_1$ (m_1 az első futásteljesítmény várható értéke, m_2 pedig a másodiké) és
H_1: $m_2 \neq m_1$. (Mivel a kérdés a futásteljesítmény bármilyen előjelű változására vonatkozott, ezért kétoldali próbát kell alkalmaznunk.)
A diétázás hatására vonatkozó információ a két eredmény különbségében rejlik, ezért erre a mintára az alábbi hipotéziseket írhatjuk fel: H_0': $m = 0$, H_1': $m \neq 0$, és a mintánk:

a különbségék	110	-20	80	60	-40	-30	50	160	60	70

Az adatok normális eloszlásból származnak, így t-próbát alkalmazhatunk.
$\overline{X} = 50$, $s_n^{*2} = \sum_{i=1}^{10}(X_i - 50)^2/9 = (3600 + 4900 + 900 + 100 + 8100 + 6400 + 12100 + 100 + 400)/9 = 36600/9 = 4066{,}67$. A próbastatisztika: $t_9 = \frac{\sqrt{10}\cdot\overline{X}}{s_{10}^*} = 2{,}48$, a t-eloszlás táblázata szerint az $\alpha = 0{,}05$-hoz tartozó kritikus érték pedig 2,262, ezért az a következtetésünk, hogy szignifikáns a diétázás hatása (nő a futásteljesítmény).

8. Mivel a minták nem függetlenek (ugyanazt az 5 autót vizsgáltuk), ezért egymintás próbát kell alkalmaznunk. Az eredeti hipotéziseink úgy fogalmazhatók meg, hogy H_0: $m_1 \leq m_2$ (m_1 a szerviz előtti fogyasztás várható értéke, m_2 pedig a szerviz utánié) és H_1: $m_1 > m_2$.
A szerviz eredményességére vonatkozó információ a két eredmény különbségében rejlik, ezért az egymintás próbát az alábbi hipotézisek vizsgálatára alkalmazhatjuk: H_0': $m \leq 0$, H_1': $m > 0$ (ahol $m = m_1 - m_2$), és a mintánk:

a fogyasztás javulása	0,4	0,6	0,7	0,0	0,3

A kapott adatok feltehetően közelíthetőek normális eloszlással, és így t-próbát alkalmazhatunk.
$\overline{X} = 0{,}4$, $s_n^{*2} = \sum_{i=1}^{5}(X_i - 0{,}4)^2/4 = (0{,}04 + 0{,}09 + 0{,}16 + 0{,}01)/4 =$

0,075. A próbastatisztika: $t_4 = \frac{\sqrt{5}\cdot\overline{X}}{s_5^*} = 3{,}27$, az $\alpha = 0{,}025$ elsőfajú hiba-valószínűséghez tartozó kritikus érték pedig 2,776, így el tudjuk utasítani a nullhipotézist. Tehát szignifikáns a szerviz hatása.

9. Mivel a két minta független egymástól (különböző gyáregységekben mértük a selejtarányt) ezért kétmintás próbát alkalmazhatunk. Azt, hogy a mintánk normális eloszlású, reális feltételeznünk, és így – ha a szórások egyezését elfogadhatjuk – kétmintás t-próbát alkalmazhatunk.
Kezdjük tehát a szórások vizsgálatával.

$$\overline{X} = 12{,}3,$$

$$s_x^{*2} = \frac{16+4+25+1+4+16+4+25+1+36}{900} = \frac{132}{900},$$

$$\overline{Y} = 12{,}5,$$

$$s_y^{*2} = \frac{16+25+16+9+4+1+1+9+25+36}{900} = \frac{142}{900},$$

és így a két szórás azonossága az F-próba alapján elfogadható.
A hipotéziseink: H_0: $m_1 \geq m_2$ (m_1 az „A", m_2 pedig a „B" gyáregységben várható selejtarány) és
H_1: $m_1 < m_2$.
(Mindig úgy fogalmazzuk meg a hipotéziseket, hogy az ellenhipotézisbe kerüljön az az állítás, amit igazolni szeretnénk.) A próbastatisztika:

$$t_{18} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{9(s_x^{*2} + s_y^{*2})}}\sqrt{90} = -1{,}13,$$

a kritikus érték pedig $-1{,}734$ (18 a szabadságfok és egyoldali az ellenhipotézis), tehát nem szignifikáns a különbség a két gyáregység között.

10. A minták nem függetlenek (ugyanazokon a helyeken mértük a légszennyezettséget), ezért egymintás próbát kell alkalmaznunk. Az eredeti hipotéziseink úgy fogalmazhatók meg, hogy H_0: $m_2 = m_1$ (m_1 a XI.15-i légszennyezettség várható értéke, m_2 pedig a XI.29-ié) és H_1: $m_1 \neq m_2$. A feltett kérdés alapján kétoldali ellenhipotézist kell alkalmaznunk.
A légszennyezettség változására vonatkozó információ a két mérési eredmény különbségében rejlik, az erre vonatkozó hipotézisek:
H_0': $m = 0$, H_1': $m \neq 0$ (ahol $m = m_2 - m_1$), és a mintánk:

a változás	0,5	-0,4	0,6	0,4	-0,2	1,0	0,2	-0,1	0,3	0,7

Feltételezhetjük, hogy az adatok normális eloszlással közelíthetőek, és így t-próbát alkalmazhatunk.

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= 0{,}3,\\
s_n^{*2} &= \sum_{i=1}^{10} \frac{(X_i - 0{,}3)^2}{9}\\
&= \frac{4 + 49 + 9 + 1 + 25 + 49 + 1 + 16 + 16}{900} = 1{,}89.
\end{aligned}$$

A próbastatisztika: $t_9 = \frac{\sqrt{10}\cdot\overline{X}}{s_{10}^*} = 2{,}18$, a kritikus érték pedig 2,262 (az $\alpha = 0{,}05$ szinten). Tehát ezen hibavalószínűség mellett el kell fogadnunk a H_0-t, azonban a kritikus értékhez közeli statisztikaérték mindenképpen gyanút kelt: ha elérhető, akkor pl. érdemes további adatokkal is megismételni a tesztet.

11. A próbastatisztika célszerűen a σ-ra vonatkozó elégséges statisztika: $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Mivel a H_1 teljesülése esetén T nagyobb értékeket vesz fel, ezért $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : T(\mathbf{X}) > c\}$ alakú kritikus tartományt logikus választani. A c értéket a χ^2-eloszlás táblázatából határozhatjuk meg, hiszen H_0 teljesülése esetén T n szabadságfokú χ^2-eloszlású. Az elsőfajú hiba valószínűsége akkor lesz 0,05, ha c értékét a χ_n^2-eloszlás 0,95 kvantilisének választjuk, hiszen akkor $P_0(T(\mathbf{X}) > c) = 0{,}05$. A táblázatból például $n = 30$ esetén $c = 43{,}8$.

6.3.2 Nemparaméteres próbák

12. (a) A feladat tiszta illeszkedésvizsgálat, amit χ^2-próbával végezhetünk el. Minden egyes érték várt gyakorisága 100/6, így a próbastatisztika értéke

$$\chi_5^2 = \frac{44^2 + 26^2 + 14^2 + 28^2 + 22^2 + 34^2}{600} = 8{,}72.$$

Mivel az $\alpha = 0{,}05$-hoz tartozó kritikus érték 11,1, ezért a χ^2-próba alapján nem tudjuk elutasítani a H_0 hipotézist (a kocka szabályosságát).
(b) A folytonos egyenletes eloszlás illesztésénél próbálkozhatunk Kolmogorov–Szmirnov-próbával is. Az elméleti és a tapasztalati eloszlásfüggvény maximális eltérése a 3 pontbeli jobboldali határérték, amely $0{,}64 - 0{,}5 = 0{,}14$. A táblázatunk alapján megállapíthatjuk, hogy mégis szignifikáns az eltérés: $\alpha = 0{,}05$ mellett el tudjuk utasítani, hogy egyenletes eloszlásból származik a minta.

Megjegyzés. A χ^2- és a Kolmogorov–Szmirnov-próba között nem lehet egyértelmű rangsort felállítani, mert más és más ellenhipotézisekre érzékenyek. Ha – mint esetünkben is – az egyirányú eltérések egymás után következnek, akkor van esély arra, hogy a Kolmogorov–Szmirnov-próba a hatásosabb.

13. A feladatunk tiszta illeszkedésvizsgálat, melyet egyrészt Kolmogorov–Szmirnov-próbával, másrészt χ^2-próbával tesztelhetünk.

A tapasztalati és elméleti eloszlásfüggvény maximális eltérése a 0,24 pontbeli jobboldali határérték, ami éppen $0{,}5 - 0{,}24 = 0{,}26$. Ez a különbség még nem sziginifikáns, hiszen a táblázatbeli kritikus érték 0,29.

A χ^2-próba elvégzéséhez részintervallumokat kell választanunk. Ezt semmiképpen sem az adatokhoz „illesztve", hanem a mintaelemszám és az illeszteni kívánt eloszlás alapján kell megtennünk, célszerűen olymódon, hogy az egyes részintervallumok feltételezett valószínűsége egymáshoz közeli legyen. Arra is ügyelnünk kell, hogy az intervallumok száma ne legyen túl magy, mert ha az egyes intervallumokba túl kevés megfigyelés esik (pl. $\nu < 3$), akkor kevéssé jó a χ^2 eloszlással való közelítés , és így a próba elsőfajú hiba valószínűsége eltérhet attól, amit várunk. Mindezek alapján logikus négy egyforma hosszú intervallumra osztani a $[0, 1]$ intervallumot. Így a következőt kapjuk:

intervallumok	0-0,25	0,25-0,5	0,5-0,75	0,75-1
gyakoriságok	10	3	4	3

A próbastatisztika értéke

$$\chi_3^2 = \frac{25 + 4 + 1 + 4}{4} = 8{,}5,$$

tehát mégis szignifikáns az eltérés.

14. (a) Ahogy azt már az 1.1. feladat megoldásánál láttuk, a bérek átlaga 50 (ezer Ft), míg könnyen kiszámolható, hogy a korrigált tapasztalati szórás is 50 (ezer Ft). A javasolt hisztogram 20 ezer Ft-onként generál osztályokat, és így az egyes intervallumok megfigyelt, illetve várt gyakoriságaira az alábbi táblázat adódik (kihasználva, hogy a feltételezett esetben $\frac{X-50}{50}$ standard normális eloszlású).

intervallumok	$(-\infty,20]$	$(20,40]$	$(40,60]$
a vszg. képlete	$\Phi(-0{,}6)$	$\Phi(-0{,}2)-\Phi(-0{,}6)$	$\Phi(0{,}2)-\Phi(-0{,}2)$
elméleti gyak. (np_i)	6,86	3,66	3,96
megfigyelt gyak. (ν_i)	3	12	6
intervallumok		$(60,80]$	$(80,\infty)$
a vszg. képlete		$\Phi(0{,}6)-\Phi(0{,}2)$	$1-\Phi(0{,}6)$
elméleti gyak. (np_i)		3,66	6,86
megfigyelt gyak. (ν_i)		1	3

(A 80 feletti osztályokat összevontuk, mert külön-külön nagyon kicsi lett volna a várt gyakoriság.) A statisztika értéke $\chi_2^2 = 26{,}33$, ami azt mutatja, hogy $p = 0{,}01$ elsőfajú hibavalószínűség mellett is elutasítjuk a normalitást.
(b) Ezek után látszólag felesleges is foglalkozni a kérdéssel, hiszen az (a) részben el tudtuk utasítani, hogy a minta normális eloszlásból származik. De most más a feltételezett paraméter, mint amit ott becslésként kaptunk, úgyhogy azért számoljuk ki a χ^2-statisztika értékét.

intervallumok	$(-\infty,20]$	$(20,40]$	$(40,60]$
vszg. képlete	$\Phi(-2/3)$	$\Phi(0)-\Phi(-2/3)$	$\Phi(2/3)-\Phi(0)$
elméleti gyak. (np_i)	6,31	6,19	6,19
megfigyelt gyak. (ν_i)	3	12	6
intervallumok		$(60,80]$	$(80,\infty)$
vszg. képlete		$\Phi(4/3)-\Phi(2/3)$	$1-\Phi(4/3)$
elméleti gyak. (np_i)		4,03	2,28
megfigyelt gyak. (ν_i)		1	3

A statisztika értéke $\chi_4^2 = 9{,}7$, ami azt mutatja, hogy $\alpha = 0{,}01$ elsőfajú hibavalószínűség mellett még elfogadjuk a normalitást. Akkor most mitévők legyünk? Próbálkozhatunk Kolmogorov–Szmirnov-próbával is, de ott sincs több szerencsénk. Akkor most az (a) részben hibáztunk volna? A helyzet kulcsa abban rejlik, hogy az összevont hisztogram alkalmazása során elvesztettük azt a fontos információt, hogy van egy kiugróan nagy értékünk is, amely 4-szeres szórásnyi távolságra van a várható értéktől. Annak az esélye, hogy a H_0 esetén 25 megfigyelés egyikeként egy ekkora értéket kapjunk, kisebb még 0,001-nél is, tehát mégis nyugodt szívvel elutasíthatjuk a normalitást.

Megjegyzés. A kiugró érték gyakran mérési vagy egyéb hiba eredménye (és így elvileg elképzelhető lenne, hogy akkor járunk el helyesen, ha kihagyjuk a mintából. Most azonban a feladat természetéből fakad, hogy adódhatnak ilyen nagy értékek, tehát jogos a normalitás elutasítása.

15. Az adatokból ki tudjuk számolni, hogy a feltételezett 2,2 várható értékű és 1,5 szórású normális eloszlás esetén hány megfigyelésnek kellett volna

az adott intervallumokba esni, és ezen adatoknak a ténylegesen megfigyelt gyakoriságokkal való egyezését a χ^2-próbával vizsgálhatjuk. (Azért, hogy teljes eseményrendszert vizsgáljunk, a szélső intervallumokat kibővítjük egészen a $-\infty$ és $+\infty$ pontokig.) A feladat becsléses illeszkedésvizsgálat, mert az illesztendő eloszlás paramétereit a mintából becsültük.
A tapasztalati és az elméleti értékek együttes táblázata:

intervallumok	$(-\infty,1]$	$(1,2]$	$(2,3]$	$(3,+\infty)$
elméleti gyakoriságok (np_i)	10,595	11,755	12,805	14,845
megfigyelt gyakoriságok (ν_i)	4	15	19	12

A próbastatisztika:

$$\chi_1^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} = 4{,}11 + 0{,}90 + 3{,}00 + 0{,}54 = 8{,}55.$$

Az $\alpha = 0{,}01$-hoz tartozó kritikus érték a 6,63, tehát még ezen a szinten is elutasítjuk a H_0-t.

16. A feladat ezúttal is becsléses illeszkedésvizsgálat, de most csak a várható értéket becsüljük a mintából. Ennek legjobb becslése az $\overline{X} = 6000$ statisztika.
Ezek után ki tudjuk számolni, hogy a becsült paraméterekkel megadott normális eloszlás esetén hány megfigyelésnek kellett volna az adott intervallumokba esni. Ezen adatoknak a ténylegesen megfigyelt gyakoriságokkal való egyezését a χ^2-próbával vizsgálhatjuk.
A tapasztalati és az elméleti értékek együttes táblázata:

intervallumok	5000 alatt	5000-6000	6000-7000	7000 felett
elméleti gyak. (np_i)	25	25	25	25
megfigyelt gyak. (ν_i)	20	31	28	21

A próbastatisztika:

$$\chi_2^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} = 1 + 1{,}44 + 0{,}36 + 0{,}64 = 3{,}44,$$

ami azt mutatja, hogy még $\alpha = 0{,}1$ elsőfajú hibavalószínűség mellett is elfogadjuk a normalitást.

17. A feladat becsléses illeszkedésvizsgálat, de most a binomiális eloszlás n paramétere ismert: mivel minden osztályba 30 diák jár, ezért $n = 30$.

A p (az a valószínűség, amely azt mutatja meg, hogy egy adott diák mekkora valószínűséggel színtévesztő) viszont ismeretlen. Az $\overline{X}$ statisztika a binomiális eloszlás várható értékére, azaz $30p$-re jó becslés. Ezért p-re a

$$\hat{p} = \frac{\overline{X}}{30} = 0{,}01$$

a becslésünk.

Ezek után ki tudjuk számolni, hogy a becsült paraméterekkel megadott binomiális eloszlás esetén hány megfigyelésnek kellett volna az egyes számokkal megegyezni (ügyelnünk kell arra, hogy teljes eseményrendszerrel dolgozzunk, tehát az utolsó esetet ki kell bővíteni 3 – 30 alakra). Ezen adatoknak a ténylegesen megfigyelt gyakoriságokkal való egyezését a χ^2-próbával vizsgálhatjuk. A tapasztalati és az elméleti értékek együttes táblázata:

értékek	0	1	2	3-
elméleti gyakoriságok (Np_i)	369,8	112,1	16,4	1,7
megfigyelt gyakoriságok (ν_i)	408	48	30	14

A próbastatisztika:

$$\chi_2^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(\nu_i - Np_i)^2}{Np_i} = 3{,}9 + 36{,}6 + 11{,}2 + 91{,}8 = 143{,}5,$$

ami minden elképzelhető szinten a binomiális eloszlás elutasítását jelenti. (Mi lehet az ok? Például az, hogy valójában több színtévesztő lenne, de egyes osztályokban nem megfelelő komolysággal végezték el a vizsgálatot, és így nem minden színtévesztőt sikerült felderíteni.)

18. A feladat ezúttal is becsléses illeszkedésvizsgálat. Az exponenciális eloszlás λ paraméterére a maximum likelihood becslés $\frac{1}{\overline{X}} = \frac{1}{1{,}36} = 0{,}735$. Ezek után ki tudjuk számolni, hogy a becsült paraméterekkel megadott exponenciális eloszlás esetén hány megfigyelésnek kellett volna az egyes intervallumokba esni (ügyelnünk kell arra, hogy teljes eseményrendszerrel dolgozzunk, tehát az utolsó intervallumot ki kell bővíteni). Ezen adatoknak a ténylegesen megfigyelt gyakoriságokkal való egyezését a χ^2-próbával vizsgálhatjuk. A tapasztalati és az elméleti értékek együttes táblázata:

intervallumok	$0-1$	$1-2$	$2-3$	$3-$
elméleti gyakoriságok (np_i)	51,8	25	12	11,2
megfigyelt gyakoriságok (ν_i)	37	24	26	13

A próbastatisztika:

$$\chi_2^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} = 4{,}23 + 0{,}04 + 16{,}33 + 0{,}29 = 20{,}89,$$

tehát még $\alpha = 0{,}01$ elsőfajú hibavalószínűség mellett is elutasítjuk azt, hogy a minta exponenciális eloszlásból származik.

19. A feladat ezúttal is becsléses illeszkedésvizsgálat. A Pascal-eloszlás p paramétere ismeretlen. Az $\overline{X}$ statisztika a Pascal-eloszlás várható értékére, azaz $1/p$-re maximum likelihood becslés. Ezért p-re a

$$\hat{p} = 1/\overline{X} = 200/250 = 0{,}8$$

a becsłésünk.
Ezek után ki tudjuk számolni, hogy a becsült paraméterrel megadott Pascal-eloszlás esetén hány megfigyelésnek kellett volna az egyes számokkal megegyezni (ügyelnünk kell arra, hogy teljes eseményrendszerrel dolgozzunk, tehát az utolsó esetet ki kell bővíteni $[4, +\infty)$ alakra). Ezen adatoknak a ténylegesen megfigyelt gyakoriságokkal való egyezését a χ^2-próbával vizsgálhatjuk. A tapasztalati és az elméleti értékek együttes táblázata:

értékek	1	2	3	4–
elméleti gyakoriságok (np_i)	160	32	6,4	1,6
megfigyelt gyakoriságok (ν_i)	160	32	6	2

A próbastatisztika:

$$\chi_2^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{0{,}16}{6{,}4} + \frac{0{,}16}{1{,}6} = 0{,}12,$$

ami igen jó egyezést mutat a Pascal-eloszlással.
Megjegyzés. Az ilyen jó egyezés is gyanús. Ilyen kicsi értéket is legfeljebb az esetek 5%-ában várhatunk, ezért felmerülhet a gyanú, hogy valóban független, azonos körülmények között végrehajtott kísérletek eredményei szerepelnek-e a táblázatunkban. (Nem „kozmetikázta"-e valaki az adatokat?)

20. A feladatunk homogenitásvizsgálat, melyet χ^2-próbával végezhetünk el. A próbastatisztika:

$$\chi_5^2 = nm \sum_{i=1}^{6} \frac{(\frac{\nu_i}{n} - \frac{\mu_i}{m})^2}{\nu_i + \mu_i} = 0 + 0{,}67 + 0{,}20 + 1{,}09 + 0{,}19 + 0{,}05 = 2{,}2,$$

ami semmiképpen sem mond ellent a két eloszlás azonosságának.

21. A feladatunk függetlenségvizsgálat, melyet legegyszerűbben χ^2-próbával végezhetünk el. A próbastatisztika:

$$\chi^2_{(r-1)(s-1)} = n \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(\nu_{ij} - \frac{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}}{n})^2}{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}},$$

ahol r és s a két tulajdonságnál megkülönböztethető események száma, a példánkban $r = s = 3$.

$$\chi^2_4 = 0 + \frac{(60-65)^2}{65} + \frac{(60-55)^2}{55} + \frac{(70-80)^2}{80} + \frac{(70-65)^2}{65} + \\ + \frac{(60-55)^2}{55} + \frac{(90-80)^2}{80} + 0 + \frac{(45-55)^2}{55} = 6,$$

ami még $\alpha = 0{,}1$ mellett sem mutat szignifikáns eltérést.

22. A feladat szövege alapján az alábbi táblázat adódott:

kávé \ tea	szereti	közömbös	nem szereti	összesen
szereti	100	200	200	500
közömbös	100	50	50	200
nem szereti	100	50	150	300
összesen	300	300	400	1000

A feladatunk innen függetlenségvizsgálat, melyet legegyszerűbben χ^2-próbával végezhetünk el. A próbastatisztika:

$$\chi^2_{(r-1)(s-1)} = n \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(\nu_{ij} - \frac{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}}{n})^2}{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}},$$

ahol r és s a két italnál megkülönböztethető vélemények száma, a mi esetünkben $r = s = 3$.

$$\chi^2_4 = \frac{(100-150)^2}{150} + \frac{(200-150)^2}{150} + 0 + \frac{(100-60)^2}{60} + \\ + \frac{(50-60)^2}{60} + \frac{(50-80)^2}{80} + \frac{(100-90)^2}{90} + \frac{(50-90)^2}{90} + \frac{(150-120)^2}{120},$$

amiből már az első két tag bőven nagyobb 20-nál (ami nagyobb, mint a 4 szabadságfokú χ^2-eloszlás táblázatában szereplő legnagyobb, $\alpha = 0{,}01$-hoz tartozó kritikus érték), azaz nem független a két ital szeretete.

23. A feladatunk ismét függetlenségvizsgálat, melyet szokás szerint χ^2-próbával végezhetünk el. A próbastatisztika értéke:

$$\chi_3^2 = \frac{(50-42)^2}{42} + 0 + \frac{(35-42)^2}{42} + \frac{(20-21)^2}{21} + \frac{(10-18)^2}{18} + 0 + \\ + \frac{(25-18)^2}{18} + \frac{(10-9)^2}{9} = 9{,}13,$$

tehát még $\alpha = 0{,}05$ elsőfajú hibavalószínűség mellett is elutasíthatjuk a sportolás és a jegyek függetlenségét.

24. A feladat valójában olyan becsléses illeszkedésvizsgálat, ahol az illesztendő eloszlásról azt tudjuk, hogy $P(A) = P(B)$. A P(közömbös) valószínűség természetes becslése a relatív gyakoriság, melynek értéke $200/1000 = 0{,}2$. Ebből adódóan a feltételezett elméleti eloszlás esetén várt gyakoriságértékek: $np_A = np_B = 400$, amiből a próbastatisztika

$$\chi_1^2 = \frac{(\nu_A - np_A)^2}{np_A} + \frac{(\nu_B - np_B)^2}{np_B} = 2,$$

ami azt adja, hogy elfogadható a nullhipotézis még nagy elsőfajú hibavalószínűség mellett is.

25. Az leolvasható a táblázatból, hogy arányaiban több gyermeknek van lyukas foga azok közül, akik nem fluoridos vizet isznak, tehát csak az a kérdés, hogy ez a hatás szignifikáns-e. Ezt a legegyszerűbben χ^2-próbás függetlenségvizsgálattal dönthetjük el.
A próbastatisztika:

$$\chi_3^2 = \frac{(140-154{,}05)^2}{154{,}05} + \frac{(160-145{,}95)^2}{145{,}95} + \frac{(18-12{,}84)^2}{12{,}84} + \\ + \frac{(7-12{,}16)^2}{12{,}16} + \frac{(16-10{,}27)^2}{10{,}27} + \frac{(4-9{,}73)^2}{9{,}73} + \\ + \frac{(16-12{,}84)^2}{12{,}84} + \frac{(9-12{,}16)^2}{12{,}16} = 1{,}28 + 1{,}35 + 2{,}08 + \\ + 2{,}19 + 3{,}20 + 3{,}37 + 0{,}78 + 0{,}82 = 15{,}06,$$

ami még az $\alpha = 0{,}01$-hoz tartozó kritikus értéknél is nagyobb, tehát elutasítható a függetlenség, azaz szignifikáns a fluorid hatása.

Megjegyzés. Ha az egyik eseményrendszer kételemű, akkor ekvivalens a χ^2-próbás homogenitás- és függetlenségvizsgálat, tehát homogenitásvizsgálattal is pontosan ugyanezt az eredményt kaptuk volna.