3. Hipotézisvizsgálat

A matematikai statisztika másik alapfeladata a számunkra érdekes, előzetesen megfogalmazott hipotézis, H_0 ellenőrzése ($H_0 : \{\vartheta \in \Theta_0\}$; ahol a Θ paraméterteret két diszjunkt részre bontottuk: $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$). Ezt általában egy úgynevezett *próbastatisztika* alapján tesszük meg, kijelölve azon megfigyelés-értékek halmazát, amelyekre elfogadjuk ($\mathcal{X}_e$), illetve elutasítjuk ($\mathcal{X}_k$) a H_0 hipotézist. A célunk az, hogy ezt az alap (null)hipotézist csak akkor vessük el, ha arra nyomós okunk van. Így előre megadott α (tipikusan 0,05 vagy még kisebb) szintre állíthatjuk be a próba α terjedelmét, ami az *elsőfajú hibavalószínűségek* felső határa (elsőfajú hibát akkor követünk el, ha elutasítjuk a H_0 hipotézist, pedig igaz):

$$\alpha = \sup_{\vartheta \in \Theta_0} P_\vartheta(\mathcal{X}_k).$$

A *másodfajú hiba valószínűsége* a $\beta(\vartheta) = P_\vartheta(\mathcal{X}_e)$ kifejezés (ha $\vartheta \in \Theta_1$), amely valószínűség – elsősorban a Θ_0-hoz közeli ϑ értékekre – nagy ($1 - \alpha$-t megközelítő) értékeket is felvehet. Adott $\vartheta \in \Theta_1$ esetén a másodfajú hiba valószínűsége a mintaelemszám növelésével csökkenthető. Gyakran használt fogalom még az erőfüggvény, ami a helyes döntés valószínűsége az ellenhipotézis fennállása mellett: $P_\vartheta(\mathcal{X}_k) = 1 - \beta(\vartheta)$.

1. Egy érme szabályosságát (a $H_1 : p > 0{,}5$ ellenhipotézissel szemben; p a fejdobás valószínűsége) az alábbi módszerrel teszteljük: n-szer feldobjuk az érmét, és ha legalább 2 írást dobtunk, akkor elfogadjuk H_0-t.

(a) Mekkora legyen n, hogy $\alpha < 0{,}05$ teljesüljön?

(b) Adjuk meg a próba erőfüggvényét.

2. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ minta az alábbi sűrűségfüggvénnyel megadott eloszlásból:

$$f(x) = \frac{2x}{\vartheta^2},$$

ha $0 < x < \vartheta$, és 0 különben. A következő hipotéziseket vizsgáljuk: $H_0 : \vartheta = 1$, $H_1 : 0 < \vartheta < 1$.

(a) Adjunk meg $X_n^{(n)}$ függvényében 0,05 terjedelmű próbát.

(b) Adjuk meg a próba erőfüggvényét.

(c) Mekkora legyen az n, hogy $\vartheta = 0{,}5$ esetén legalább 0,99 valószínűséggel helyesen döntsünk?

3. Adott egy n elemű minta az

$$f(x) = 2e^{2a-2x}$$

(ha $a < x$, 0 különben) sűrűségfüggvényű eloszlásból.
A következő hipotéziseket vizsgáljuk: $H_0 : a = 1$, $H_1 : a > 1$.

(a) Adjunk meg $X_1^{(n)}$ függvényében α terjedelmű próbát.

(b) Adjuk meg a próba erőfüggvényét.

4. Egy urnában k-tól $k+n-1$-ig egyesével megszámozott golyók vannak (k és n is ismeretlen). Hipotéziseink: H_0: $n = 5$, H_1: $n > 5$.
A következő próbát alkalmazzuk: kihúzunk 3 golyót visszatevés nélkül, és akkor utasítjuk el a H_0-t, ha a legnagyobb és a legkisebb kihúzott szám különbsége legalább 4.
Adjuk meg az elsőfajú hiba valószínűségét és a próba erőfüggvényét.

5. Tekintsünk egy n elemű mintát az

$$f(x;\mu,\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right\}, \quad x > 0,$$

sűrűségfüggvényű inverz Gauss-eloszlásból, ahol μ és λ pozitív paraméterek. Ismert λ esetén konstruáljunk α terjedelmű próbát a $H_0 : \mu = \mu_0$ hipotézis tesztelésére a $H_1 : \mu \neq \mu_0$ kétoldali ellenhipotézis ellenében. (vö. a 2.30. és 2.47. feladatokkal).

3.1 Paraméteres próbák

A próbastatisztika kiválasztása a valószínűségi modellhez illeszkedik. Az előző fejezetekben látott elégséges statisztikák minden információt tartalmaznak az ismeretlen paraméterre, ezért azoknál az úgynevezett paraméteres problémáknál, ahol egy valós paraméterre vonatkozó állítások alkotják az egyes hipotéziseket, maga az elégséges statisztika (vagy egy függvénye) definiálja a próbát. A legfontosabb ilyen eset az, amikor a mintaelemek *normális eloszlásúak*. A továbbiakban röviden áttekintjük az erre az esetre vonatkozó legfontosabb próbákat.

A várható értékre vonatkozó $H_0 : m = m_0$ hipotézist ismert szórás esetén az *u-próbával* ellenőrizhetjük, melynek statisztikája

$$u = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - m_0}{\sigma},$$

ami a H_0 teljesülése esetén standard normális eloszlású. Abban a sokkal gyakoribb esetben, amikor a szórás nem ismert, a *t-próbát* alkalmazhatjuk. A próbastatisztika

$$t_{n-1} = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*},$$

ahol $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ jelöli a mintaelemek átlagát, $s_n^{*2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$, a korrigált tapasztalati szórásnégyzet, amely – tetszőleges véges szórású eloszlásra – a szórásnégyzet torzítatlan becslése. Ha független, normális eloszlású mintából indulunk ki, akkor t_{n-1} $n-1$ szabadságfokú t-eloszlású. Sokszor a feladatunk nem egy mintára, hanem két minta összehasonlítására vonatkozik. Ha a minták függetlenek egymástól, akkor úgynevezett kétmintás próbákat alkalmazhatunk. A H_0: $m_1 = m_2$ hipotézis ellenőrzésére ismert szórások esetén a kétmintás u-próba alkalmazható, melyben

$$u = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

a H_0 esetén standard normális eloszlású. Ha nem ismert a szórás, de feltehető, hogy azonos a két minta szórása (ezt az F-próbával ellenőrizhetjük, l. később), akkor a kétmintás t-próbát használhatjuk:

$$t_{n_1+n_2-2} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_x^{*2} + (n_2 - 1)s_y^{*2}}}\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

A kétmintás t-próba elvégzése előtt meg kell győződnünk arról, hogy legalábbis elfogadható a két minta szórásának egyezése. A szórásokra vonatkozó $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ hipotézist az *F-próbával* ellenőrizhetjük. A próbastatisztika a két korrigált tapasztalati szórásnégyzet hányadosa, mely a szórások azonossága esetén F-eloszlású. A gyakorlatban az

$$F = \max\left(\frac{s_x^{*2}}{s_y^{*2}}, \frac{s_y^{*2}}{s_x^{*2}}\right)$$

alakot használhatjuk, melyhez a kritikus értéket az F-eloszlás táblázatából kapjuk meg.
A kétmintás próbák alkalmazásának fontos feltétele, hogy az egyes minták egymástól függetlenek legyenek. Ezért, ha pl. páronként összetartozó, egymástól nem független megfigyeléseink vannak, akkor az összetartozó értékek különbségeit véve egymintás próbára vezethető vissza a feladat.
A próbastatisztika meghatározása utáni lépés az elutasítási tartomány megadása. Ez a tartomány tipikusan az alábbiak közül a H_0 és a H_1 alakjának megfelelő: $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : T(\mathbf{X}) > t\}$ (t-t nevezzük a kritikus értéknek) $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : T(\mathbf{X}) < t\}$ vagy $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : |T(\mathbf{X})| > t\}$ (az elméleti háttérről a későbbiekben még bővebben lesz szó). A gyakorlatban a kritikus tartomány alakját a H_1 hipotézis alapján könnyen ki tudjuk választani: mindig arra kell törekednünk, hogy a próbastatisztika azon értékei kerüljenek az $\mathcal{X}_k$ kritikus tartományba, amelyek az ellenhipotézis esetén fordulnak elő gyakrabban. Például, ha a $H_1 : m > m_0$ alakú (egyoldali ellenhipotézis), akkor az

$$\mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : T(\mathbf{X}) > t\}$$

(itt T egyaránt lehet az u vagy a t statisztika). Ha viszont az ellenhipotézis $H_1 : m \neq m_0$ alakú (kétoldali ellenhipotézis), akkor az

$$\mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : |T(\mathbf{X})| > t\}.$$

Az adott α elsőfajú hibavalószínűséghez tartozó kritikus értékeket a próbastatisztika H_0 melletti eloszlásából határozhatjuk meg oly módon, hogy a $P_\vartheta(\mathcal{X}_k)$ valószínűségek minden $\vartheta \in \Theta_0$ paraméterértékre legfeljebb az α szintet érjék el. Ezt az u-, illetve a t-próba esetén az eloszlások táblázatából tudjuk leolvasni, míg néhány esetben mód van a közvetlen számolás révén történő meghatározásra is. Sok esetben nincs előre megadva az elsőfajú hibavalószínűség megengedett felső határa. Ekkor célszerű az úgynevezett *szignifikanciaszint* (a legkisebb olyan α, melyre még elutasítjuk a H_0-t) megadása.

6. Az alábbi két minta 5 – egyforma képességűnek feltételezett – sportoló súlylökésben elért eredményeit tartalmazza (tegyük fel, hogy az adatok normális eloszlásból származnak). Az első dobás előtt az edző büszkén állította, hogy tanítványai átlagosan legalább 17 métert dobnak, amit a klub igazgatója kétségbe vont. Úgy döntött, hogy csak akkor hosszabbítja meg az edző szerződését, ha a $H_0 : m = 17$ hipotézis $\alpha = 0{,}05$ elsőfajú hibavalószínűség mellett elfogadható a $H_1 : m < 17$ alternatívával szemben.

(a) Hogyan döntött az igazgató, ha a korábbi tapasztalataik alapján a dobások szórását 2-nek tekintették?

(b) Változott volna-e a helyzet, ha nem tekintik a szórást ismertnek?

(c) Az előzőek alapján az igazgató végül is még egy esélyt adott az edzőnek. Ő az első kísérlet után mindenkinek elmagyarázta, hogy mire kellene odafigyelnie a jobb eredmény érdekében. Segített-e az „edzés"?

(d) Végül is mi legyen az edző sorsa?

első eredmény	14,8	12,2	16,8	17,1	16,1
második eredmény	18,0	12,1	17,2	17,7	17,0

7. Megvizsgálták, hogy 10 ember mekkora távolságot tudott 5 perc alatt lefutni. Ezután mindenki 3 napig diétázott és így is megmérték a futásteljesítményeket. Befolyásolta-e a diéta a teljesítményt? (Tegyük fel, hogy az adatok normális eloszlásból származnak.)

első eredmény	1520	1830	1620	1740	1970
diéta után	1630	1810	1700	1800	1930
első eredmény	2130	1910	2000	1980	1900
diéta után	2100	1960	2160	2040	1970

8. Az alábbi két minta 5 autó fogyasztási adatait tartalmazza. Az első sorban a szerviz előtti, a másodikban a szerviz utáni értékek találhatóak. Csökkentette-e a szerviz a fogyasztást?

első eredmény	7,9	8,1	8,8	7,2	6,0
második eredmény	7,5	7,5	8,1	7,2	5,7

9. Az alábbi két minta két különböző gyáregységben tapasztalt selejtarányra vonatkozik (ezrelékben). Állítható-e, hogy az „A" gyáregység jobban dolgozott?

A	11,9	12,1	12,8	12,2	12,5	11,9	12,5	11,8	12,4	12,9
B	12,1	12,0	12,9	12,2	12,7	12,6	12,6	12,8	12,0	13,1

10. Az alábbi két minta 10 forgalmas csomópont levegőjében található szennyezőanyag-koncentrációra vonatkozóan két adatsort tartalmaz. Az első sorban a november 15-i, a másodikban a november 29-i számok szerepelnek. Szignifikánsan változott-e a légszennyezettség?

XI.15-i adatok	20,9	17,1	15,8	18,8	20,1
XI.19-i adatok	21,4	16,7	16,4	19,2	19,9
XI.15-i adatok	15,6	14,8	24,1	18,9	12,5
XI.19-i adatok	16,6	15,0	24,0	19,2	13,2

11. Adott egy n elemű normális eloszlású minta, melynek várható értéke 0, és a szórása σ, ismeretlen. Adjunk meg egy próbát 0,05 elsőfajú hibával az alábbi hipotézisekre:
$H_0 : \sigma = 1, \quad H_1 : \sigma > 1.$

3.2 Nemparaméteres próbák

Az alábbiakban arról az esetről lesz szó, amikor nem tudjuk néhány valós paraméterrel megadni az összes szóba jöhető eloszlást. Gyakran maga az eloszlás az ismeretlen, és erre vonatkozik a nullhipotézis. A leggyakrabban használt próba a χ^2-*próba*, mely az $A_1, \ldots, A_r$ teljes eseményrendszerre vonatkozó $H_0 : P(A_i) = p_i \ (i = 1, \ldots, \cancel{n})$ hipotézis ellenőrzésére alkalmazható, így akár paraméteres próbának is tekinthetnénk – de mivel a vizsgálandó modell gyakran nemparaméteres jellegű (például folytonos eloszlás illesztésénél, amikor a teljes eseményrendszer konstruálása is a próba része), ezért mégis ebben a fejezetben foglalkozunk vele.
A próbastatisztika

$$\chi^2_{r-1} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i},$$

ahol ν_i az A_i esemény gyakorisága. A χ^2_{r-1} statisztika $n \to \infty$ mellett $r-1$ szabadságfokú χ^2-eloszlással közelíthető, tehát a kritikus érték a megfelelő táblázatból olvasható le (a kritikus tartomány természetesen $\mathcal{X}_k = \{\mathbf{X} : \chi^2_{r-1} > h_\alpha\}$ alakú, hiszen ha a tényleges eloszlás különbözik a feltételezettől, akkor a statisztika értéke nagy lesz).
A χ^2-próbának sok lehetséges alkalmazási területe van, ezek közül a legfontosabbak:

(i) az *illeszkedésvizsgálat*, melynek legegyszerűbb változatát az előzőekben ismertettük. *Becsléses illeszkedésvizsgálatról* akkor beszélünk, amikor nem maga az eloszlás, hanem csak a típusa adott, és ezen belül a paraméter(eke)t a 2. fejezetben látott módon becsüljük. Ekkor – tekintettel arra, hogy a minta adatait egyszer már felhasználtuk a p_i értékek becslésére – a statisztika határeloszlása $r-s-1$ szabadságfokú χ^2-eloszlás (s a becsült paraméterek száma).

Folytonos eloszlások esetén a tiszta illeszkedésvizsgálatot az úgynevezett *Kolmogorov–Szmirnov-próbával* is elvégezhetjük. Ebben az esetben a próbastatisztika

$$\sqrt{n} \sup_x |F_n(x) - F(x)|.$$

A sup értéke könnyen számolható, hiszen elég a megfigyelt pontokban kiszámolni a különbség helyettesítési értékét és jobboldali határértékét.

(ii) A *homogenitásvizsgálat* feladata annak a hipotézisnek az eldöntése, hogy két minta azonos eloszlásból származik-e. Ekkor a statisztika

$$\chi^2_{r-1} = nm \sum_{i=1}^{r} \frac{(\frac{\nu_i}{n} - \frac{\mu_i}{m})^2}{\nu_i + \mu_i},$$

ahol az egyik minta n, a másik pedig m megfigyelésből áll, és az A_i események gyakorisága ν_i, illetve μ_i.

(iii) *Függetlenségvizsgálat* esetén két teljes eseményrendszer ($A_1, ..., A_r$ és $B_1, ..., B_s$) függetlenségét ellenőrizzük. A függetlenség fennállása esetén $P(A_i B_j)$ a $\frac{\nu_{i\cdot}}{n} \cdot \frac{\nu_{\cdot j}}{n}$ kifejezéssel becsülhető, ahol $\nu_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{s} \nu_{ij}$ és $\nu_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{r} \nu_{ij}$ (az A_i, illetve a B_j események gyakoriságai). A megfelelő χ^2-statisztika

$$\chi^2_{(r-1)(s-1)} = n \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(\nu_{ij} - \frac{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}}{n})^2}{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}}.$$

12. (a) $\alpha = 0{,}05$ elsőfajú hibavalószínűség mellett döntsünk arról a hipotézisről, hogy az alábbi megfigyelés-sorozat szabályos kockával dobva adódott.

 (b) Tegyük fel, hogy a $[0{,}5,\ 6{,}5]$ intervallumra koncentrálódó folytonos változó kerekített értékeire vonatkozó gyakoriságok szerepelnek a táblázatban. Tekinthető-e a változó egyenletes eloszlásúnak?

értékek	1	2	3	4	5	6
gyakoriságok	24	21	19	12	13	11

13. Tekintsük az alábbi megfigyelés-sort (az adatokat az egyszerűség kedvéért nagyság szerint rendezve adjuk meg): 0,03, 0,05, 0,08, 0,08, 0,11, 0,12, 0,14, 0,19, 0,23, 0,24, 0,31, 0,43, 0,45, 0,56, 0,61, 0,67, 0,69, 0,78, 0,85, 0,88. $\alpha = 0{,}05$ elsőfajú hibavalószínűség mellett döntsünk arról a hipotézisről, hogy a minta a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlásból származik.

14. Tekintsük az 1.1. feladatot és $\alpha = 0{,}01$ elsőfajú hibavalószínűség mellett döntsünk arról a hipotézisről, hogy

(a) a bérek eloszlása normális eloszlású.

(b) Tekinthetők-e a bérek 40 (ezer Ft) várható értékű és 30 (ezer Ft) szórású normális eloszlásúnak?

15. Döntsünk arról a hipotézisről, hogy az alábbi minta – ahol csak azt adjuk meg, hogy az egyes intervallumokba hány elem esik – normális eloszlásból származik. A minta átlaga 2,2 és korrigált tapasztalati szórásnégyzete 2,25.

intervallumok	0-1	1-2	2-3	3-4
gyakoriságok	4	15	19	12

16. 100 napon feljegyeztük egy város energiafogyasztását. Az alábbi táblázat azt tartalmazza, hogy az egyes intervallumokba hány megfigyelés esett, valamint azt is, hogy az adott intervallumba eső értékeknek mennyi az átlaga. Tekinthető-e az energiafogyasztás 1482,54 szórású normális eloszlásúnak?

intervallumok	5000 alatt	5000-6000	6000-7000	7000 felett
gyakoriságok	20	31	28	21
átlagok	3875	5700	6500	7800

17. 500 különböző, de egyaránt 30 diákból álló osztály mindegyikében feljegyezték a színtévesztők számát. Az alábbi táblázat azt tartalmazza, hogy az egyes értékek hány alkalommal fordultak elő.

értékek	0	1	2	3
gyakoriságok	408	48	30	14

Döntsünk arról a hipotézisről, hogy a fenti minta binomiális eloszlásúnak tekinthető.

18. Döntsünk arról a hipotézisről, hogy az alábbi minta – ahol azt adjuk meg, hogy az egyes intervallumokba hány elem esik, valamint azt, hogy az adott intervallumba eső értékeknek mennyi az átlaga – exponenciális eloszlásból származik.

intervallumok	0-1	1-2	2-3	3-4
gyakoriságok	37	24	26	13
átlagok	0,4	1,3	2,4	2,2

19. Döntsünk arról a hipotézisről, hogy az alábbi minta Pascal-eloszlásból származik.

értékek	1	2	3	4
gyakoriságok	160	32	6	2

20. Két dobókockával dobva az alábbi gyakoriságokat figyeltük meg:

	1	2	3	4	5	6
I.kocka	27	24	26	23	18	32
II.kocka	18	12	15	21	14	20

$\alpha = 0{,}05$ elsőfajú hibavalószínűség mellett döntsünk arról, hogy tekinthető-e a két eloszlás azonosnak.

21. Az alábbi táblázat három – a TV-ben különböző intenzitással reklámozott – fogkrém fogyasztására vonatkozó adatokat tartalmaz a TV- nézés idejének függvényében:

fogkrém fajta	„A"	„B"	„C"
TV nézés hetente	1 óra reklám	5 perc reklám	0 perc reklám
5 óránál kevesebb	80	60	60
5-15 óra között	70	70	60
15 óra felett	90	65	45

Van-e összefüggés a kedvelt fogkrém márkája és a TV nézés időtartama között?

22. Az 1.2. feladatban döntsünk arról, hogy független-e a két ital szeretete.

23. Az alábbi táblázat azt adja meg, hogy egy programozó évfolyamon hányan kapták az egyes jegyeket statisztikából, aszerint csoportosítva a diákokat, hogy sportolnak-e rendszeresen. $\alpha = 0{,}05$ szinten döntsünk arról, hogy független-e a statisztikajegy a sportolástól.

jegyek	2	3	4	5
nem sportolnak	50	35	35	20
sportolnak	10	15	25	10

24. Egy cég felmérést végzett arról, hogy két terméke közül melyiket kedvelik jobban a vásárlók. Az alábbi adatok alapján, mely 1000 ember megkérdezésén alapul, döntsünk arról a hipotézisről, hogy az „A" és a „B" jelű termék egyformán kedvelt.

válasz	„A" jelűt kedveli	közömbös	„B" jelűt kedveli
gyakoriságok	380	200	420

25. Egy orvosi felmérés azt vizsgálta, hogy a fluoriddal dúsított ivóvíz csökkentette-e a gyermekek fogszuvasodásra való hajlamát. Az alábbi adatsor alapján állapítsuk meg, hogy van-e szignifikáns hatása a fluoridnak.

Szuvas fogak száma	fluorid nélküli víz	fluoridos víz
0	140	160
1	18	7
2	16	4
3 vagy több	16	9

3.3 Valószínűséghányados-próbák

Eddig különböző problémákra ismert eljárásokat alkalmaztunk, anélkül, hogy a választott módszerek optimalitását vizsgáltuk volna. Ahhoz, hogy ezt megtehessük, célszerű a Ψ próbafüggvény fogalmának bevezetése: $\Psi(\mathbf{x})$ jelöli annak a valószínűségét, hogy az $\mathbf{x}$ minta megfigyelése esetén a H_0 hipotézist elutasítjuk. Az eddig látott próbáknál $\Psi(\mathbf{x}) = 1$, ha $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_k$ és 0 különben, de az alábbiakban szükségünk lesz olyan véletlenített próbákra is, amelyekre Ψ 0 és 1 közötti értékeket is felvehet. A próbát egyértelműen megadhatjuk a próbafüggvényével, ezért bevezethetjük az alábbi fogalmat. Ha adott két α terjedelmű próba, akkor azt mondjuk, hogy a Ψ_1 *egyenletesen jobb* a Ψ_2-nél, ha $E_\vartheta(\Psi_1(\mathbf{X})) \geq E_\vartheta(\Psi_2(\mathbf{X}))$ teljesül minden $\vartheta \in \Theta_1$-re, azaz a másodfajú hiba semelyik $\vartheta \in \Theta_1$ mellett sem nagyobb valószínűségű a Ψ_1-re, mint a Ψ_2 esetén.

A Neyman–Pearson-lemma értelmében létezik legjobb próba az egyszerű hipotézisek esetére, azaz ha $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ és az alternatíva: $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$. A legjobb próba oly módon adható meg, hogy

$$\Psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, \text{ ha } \frac{f_1(\mathbf{x})}{f_0(\mathbf{x})} > c \\ \gamma, \text{ ha } \frac{f_1(\mathbf{x})}{f_0(\mathbf{x})} = c \\ 0, \text{ ha } \frac{f_1(\mathbf{x})}{f_0(\mathbf{x})} < c \end{cases}$$

ahol $f_i(\mathbf{x})$ jelöli a minta együttes sűrűségfüggvényét (diszkrét esetben az eloszlását) a H_i hipotézis mellett ($i = 0, 1$).