Valószínűségszámítás és statisztika
8. gyakorlat
2015. 11. 13.

Elmélet

[Normálás, standardizálás] Legyen X$\sim N(m, \sigma^2)$. Ekkor
$\frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1)$; $\quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$; $\quad \Phi^{-1}(q) = -\Phi^{-1}(1-q)$, $0 < q < 1$.

[Véges sok független val. változó összege] Legyenek $X_1, ..., X_n$, X és Y *független* val. változók.

- $X_1 \sim \text{Ind}(p), ..., X_n \sim \text{Ind}(p) \Rightarrow X_1 + ... + X_n \sim \text{Bin}(n,p)$
- $X \sim \text{Bin}(n,p), Y \sim \text{Bin}(m,p) \Rightarrow X + Y \sim \text{Bin}(n+m,p)$
- $X_1 \sim \text{Geo}(p), ..., X_n \sim \text{Geo}(p) \Rightarrow X_1 + ... + X_n \sim \text{NegBin}(n,p)$
- $X \sim \text{Poi}(\lambda_1), Y \sim \text{Poi}(\lambda_2) \Rightarrow X + Y \sim \text{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2)$
- $X \sim N(m_1, \sigma_1^2), Y \sim N(m_2, \sigma_2^2) \Rightarrow X + Y \sim N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

[Markov-egyenlőtlenség:] Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény, $X \geq 0$ val.változó, $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Tegyük fel, hogy létezik az $E(g(X))$ várható érték.
Ekkor P$(X \geq \varepsilon) \leq P(g(X) \geq g(\varepsilon)) \leq \frac{E[g(X)]}{g(\varepsilon)}$.
Spec., ha $g(x) = x \Rightarrow$ P$(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$

Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változónak véges a szórásnégyzete. Ekkor

[Csebisev-egyenlőtlenség:] P$(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}$.

Legyen $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók sorozata.
[1 valószínűségű konvergencia:] $X_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ *1 valószínűséggel*, ha $P(\{\omega : X_n(\omega) \stackrel{n\to\infty}{\to} X(\omega)\}) = 1$.
[Sztochasztikus konvergencia:] $X_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ *sztochasztikusan*, ha $\forall\varepsilon > 0$ esetén $P(|X_n - X| > \varepsilon) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
[Gyenge konvergencia:] $X_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ *gyengén*, ha az eloszlásfüggvényeikre $F_n(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x)$ $\quad F$ minden folytonossági pontjában.

[Nagy számok törvénye (NSZT):] Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. val. változók, E$X_1 = m < \infty$.
Ekkor $\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \stackrel{n\to\infty}{\to} m$ 1 valószínűséggel.

[Centrális határeloszlás tétel (CHT):] Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. val. változók, E$X_1 = m$, $D^2(X_1) = \sigma^2 < \infty$.
Ekkor $\frac{X_1 + ... + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \stackrel{n\to\infty}{\to}$ N(0,1) gyengén, azaz $P\left(\frac{X_1 + ... + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) \stackrel{n\to\infty}{\to} \Phi(x)$.

Feladatok

1. (7. feladatsor, 4-es feladat) Legyen X standard normális eloszlású. Adjuk meg

   a) $Y = \mathrm{e}^X$

   b) $Y = X^2$

   sűrűségfüggvényét és várható értékét. P(Y<1)=?

2. (7. feladatsor, 5-ös feladat) Legyen X egyenletes eloszlású az $(1,4)$ intervallumon Számítsuk ki $(X-1)^2$ várható értékét.

3. (7. feladatsor, 6-os feladat) Legyen X exponenciális eloszlású $\lambda = 1$ paraméterrel. Adjuk meg $1 - \mathrm{e}^{-X}$ sűrűségfüggvényét és várható értékét.

Személyes adatok:

Név: Bondici László

E-mail: bondici@cs.elte.hu

Honlap: www.cs.elte.hu/∼bondici

4. (7. feladatsor, 7-es feladat) Tegyük fel, hogy az egyetemisták IQ teszten elért eredménye normális eloszlású 105 várható értékkel és 10 szórással. Mi a valószínűsége, hogy valaki 120-nál több pontot ér el a teszten?

5. (7. feladatsor, 8-as feladat) Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100g várható értékkel és 3g szórással, valamint, hogy az egyes táblák tömege egymástól független. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0.9 valószínűséggel nagyobb legyen 99.5 g-nál?

6. Legalább hány embert kell megkérdezni egy közvélemény-kutatásnál, ha egy adott párt támogatottságát legalább 95%-os valószínűséggel 0.01–nál kisebb eltéréssel szeretnénk megbecsülni? Számoljunk egyrészt a Csebisev-egyenlőtlenséggel, másrészt a normális eloszlással.

7. Legyen X_n n-paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Mihez tart $P(X_n < n - \sqrt{n})$, ha $n \to \infty$?

8. Legyenek $X_n, n \geq 1$ exponenciális eloszlású, független valószínűségi változók (λ paraméterrel). Mihez konvergál és milyen értelemben $n \to \infty$ esetén a következő sorozat:

$$\frac{\mathrm{e}^{X_1} + \mathrm{e}^{X_2} + \cdots + \mathrm{e}^{X_n}}{n}$$

9. Mihez tart és milyen értelemben n darab szabályos kockadobás mértani közepe?

10. Mutassuk meg, hogy a konstanshoz való eloszlásbeli konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia.

Házi feladat

1. a) Mennyi garanciát adjunk, ha azt szeretnénk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető?
   b) A Markov-egyenlőtlenség használatával adjunk felső becslést annak a valószínűségére, hogy 1000 szabályos pénzfeldobásból legalább 600 fej jött ki. (Használjuk a $g(x) = x$ és $g(x) = (\frac{3}{2})^x$ transzformáló függvényeket.)

2. a) Legyen X_n n-paraméterű Poisson-eloszlású. Mihez tart $P(X_n < n)$, ha $n \to \infty$?
   b) Legyen X_n (n, p_n)-paraméterű binomiális eloszlású. Mihez tart $\frac{X_n}{n}$, ha $p_n = p$ és $n \to \infty$?