Valószínűségszámítás és statisztika
4. gyakorlat
2015. 10. 02.

Elmélet

[Nevezetes diszkrét eloszlások:]

Eloszlás neve	Jelölése	Eloszlása	EX	D²X
Karakterisztikus (indikátorvált.)	Ind(p)	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
Geometriai (Pascal)	Geo(p)	$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ k=1,2,...	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Hipergeometriai	HipGeo(N,M,n)	$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ k=0,1,...,n	$n\frac{M}{N}$	$n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$
Binomiális	Bin(n,p)	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ k=0,1,...,n	np	$np(1-p)$
Negatív binomiális	NegBin(n,p)	$P(X=k)=\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$ k=n,n+1,...	$\frac{n}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$
Poisson	Poi(λ)	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ k=0,1,...	λ	λ

Előfordulásuk:

- Indikátor változó (Ind(p)): Egy p valószínűségű esemény bekövetkezik-e vagy sem.
- Binomiális (Bin(n,p)): n független kísérletből, melyek egyenként p valószínűséggel következnek be, hány sikeres volt? (visszatevéses mintavétel)
- Geometriai (Geo(p)): Független kísérleteket végzünk, hányadikra következik be először egy p valószínűségű esemény?
- Negatív binomiális (NegBin(n,p)): Független kísérleteket végzünk, hányadikra következik be n. alkalommal egy p valószínűségű esemény?
- Hipergeometriai (HipGeo(N,M,n)): N elemű sokaságból M selejtes, n-et választva közülük hány lesz selejtes? (visszatevés nélküli mintavétel)

[X val.változó eloszlásfüggvénye:] $F_X(x)=P(X<x)$. Amennyiben egyértelmű, melyik val.változó eloszlásfüggvényéről van szó, F(x)-et írunk.

[Az eloszlásfüggvény tulajdonságai:]
(I.) $0 \le F_X(x) \le 1$; (II.) monoton növő; (III.) balról folytonos; (IV.) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x)=1$.

[Tetszőleges X val.változó esetén:] $P(a \le X < b)=F(b)-F(a)$; $P(a < X \le b)=F(b+)-F(a+)$.

[Absz. folyt. val. vált. sűrűségfüggvénye:] X val.változó abszolút folytonos, ha létezik olyan f(x) függvény, amelyre $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Ilyenkor f(x)-et *sűrűségfüggvény*nek hívjuk.
Legyen X abszolút folytonos eloszlású. Ekkor
f(x)=F'(x); f(x) ≥ 0; $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$; $P(X=x)=0 \quad \forall x$-re; $P(a<X\le b)=P(a\le X<b)=F(b)-F(a)$.

Személyes adatok:
Név: Bondici László
E-mail: bondici@cs.elte.hu
Honlap: www.cs.elte.hu/∼bondici

[Abszolút folytonos val.változó várható értéke:] $EX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$.

[Abszolút folytonos val.változó l. momentuma:] $EX^l = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^l f(x)\, dx$.

Feladatok

1. Húzzunk egy számot 1-től n-ig, majd dobjunk egy szabálytalan érmével annyiszor, ahányast húztunk (p a fej valószínűsége). Jelölje X a fejek számát. $E(X) =$?

2. (3. feladatsor, 10-es feladat) Legyen X egy szabálytalan érmével (p a fej valószínűsége) végzett dobássorozatnál az első, azonosakból álló sorozat hossza. (Ha pl. a dobássorozat FIIIF... akkor X=1.) Számítsuk ki X várható értékét.

3. Legyen X_1 és X_2 két független, λ_1 és λ_2 paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Milyen eloszlású $X_1 + X_2$?

4. Legyen X_1 és X_2 két független, λ_1 és λ_2 paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Számoljuk ki X_1 feltételes eloszlását az $X_1 + X_2 = n$ feltételre nézve.

5. (3. feladatsor, 11-es feladat) Tegyük fel, hogy egy adott területen és időszakban a hurrikánok száma Poisson folyamattal modellezhető. Várható értékben hetente 1 hurrikánra számíthatunk. Mi a valószínűsége, hogy egy hónap (4 hét) alatt legfeljebb 2 hurrikán lesz? Ha az egyes hurrikánok ereje p=1/5 valószínűséggel haladja meg a 2-es fokozatot, akkor várhatóan hány ilyen hurrikán lesz egy hónap alatt?

6. Osztozkodási probléma: hogyan osztozzon a téten két játékos, ha 2:1 állásnál félbeszakadt a 4 győzelemig tartó mérkőzésük? (Tegyük fel, hogy az egyes játékok egymástól függetlenek, bármelyikük 1/2 valószínűséggel nyerhet az egyes meccseknél.)

7. Aladár és Béla pingpongoznak. Minden labdamenetet, egymástól függetlenül, 1/3 valószínűséggel Aladár, 2/3 valószínűséggel Béla nyer meg. A jelenlegi állás 20:19 Béla javára. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a meccset mégis Aladár nyeri meg? (Az nyer, akinek sikerül legalább két pontos előny mellett legalább 21 pontot szerezni.)

8. Legyen X egy nemnegatív egész értékeket felvevő valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy
$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k).$$

9. Legyen $0 < Y < 3$ valószínűségi változó. Eloszlásfüggvénye ezen az intervallumon $F(x) = cx^3$ alakú. Mennyi c és $P(-1 < Y < 1)$?

10. Eloszlásfüggvények-e a következő függvények?

    a) $F(x) = 1 - (\frac{c}{x})^a$, ha $x > c$, és 0 különben ($a, c > 0$);

    b)
    $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ \frac{[x]}{2}, & \text{ha } 0 < x < 2; \\ 1, & \text{ha } x \geq 2. \end{cases}$$

Házi feladat

1. a) Egy dobozban az 1, 2, 3, 4 feliratú 4 cédula van. Visszatevéssel húzunk, amíg 4-es nem kerül a kezünkbe. Mekkora a kihúzott számok összegének várható értéke?

    b) Eloszlásfüggvény-e az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)$ függvény? És a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}$?