Valószínűségszámítás és statisztika
3. gyakorlat
2015. 09. 25.

Elmélet

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, X: $\Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó.

[Várható érték] X várható értéke: EX=$\int\limits_{\Omega} X\, dP$, ha ez létezik.

[k. momentum] EX^k=$\int\limits_{\Omega} X^k\, dP$, ha ez létezik.

[X szórásnégyzete] D^{2}X=E[(X-EX)]^2 = E(X^2)-(EX)^2.

[X szórása] DX=$\sqrt{D^2X}$.

Legyen X diszkrét valószínűségi változó, ami az x_1,x_2,... értékeket veszi fel, p_1,p_2,... valószínűségekkel, amelyekre $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots$ = 1. Ekkor

EX=$\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, ha a végtelen összeg abszolút konvergens. Ugyanígy

EX^k=$\sum\limits_{i=1}^{\infty} (x_i)^k p_i$, ha a végtelen összeg abszolút konvergens.

Legyenek $X, Y, X_1, ..., X_n$ valószínűségi változók; $c, c_i, a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $E(X + Y) = EX + EY$;
- $E(cX) = cEX$;
- $E \sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i EX_i$;
- $D^2(aX + b) = a^2 D^2 X$.

[Poisson eloszlás] Az X valószínűségi változó λ paraméterű Poisson eloszlású, ha $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, k=0,1,2...

Feladatok

1. Hány dobókocka esetén a legnagyobb annak a valószínűsége, hogy a kockákat egyszerre feldobva, a kapott számok között pontosan egy hatos van?

2. Egy tétova hangya a számegyenesen bolyong. 0-ból indul és minden lépésnél egyforma valószínűséggel vagy jobbra, vagy balra lép. Adjuk meg a hangya helyének eloszlását 2n lépés után.

3. Jelölje X az ötös lottón kihúzott lottószámok legkisebbikét. Adjuk meg X eloszlását.

4. Dobjunk egy kockával annyiszor, ahány fejet dobtunk két szabályos érmével. Jelölje X a kapott számok összegét. Adjuk meg X eloszlását. (Az üres összeget 0-nak tekintjük.)

5. Legyenek A, B, C, D egy szabályos tetraéder csúcsai. Egy légy az A csúcsból indulva sétál a tetraéder élein, mégpedig minden csúcsból véletlenszerűen választva a lehetséges három irány közül. Jelölje X azt a valószínűségi változót, hogy A-ból indulva, hányadikra ér vissza először A-ba. Számítsuk ki a $P(X = n)$ valószínűséget! Mutassuk meg, hogy ez valóban valószínűségeloszlás!

Személyes adatok:

Név: Bondici László

E-mail: bondici@cs.elte.hu

Honlap: www.cs.elte.hu/$\sim$bondici

6. Egy sorsjátékon 1 darab 1.000.000Ft-os, 10 db 100.000Ft-os, és 100 db 1.000Ft-os nyeremény van. A játékhoz 10.000 darab sorsjegyet adtak ki. Mennyi a sorsjegy ára, ha egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke megegyezik a sorsjegy árával?

7. Dobjunk egy érmével annyiszor, amennyit egy szabályos kockával dobtunk. Jelölje X a fejek számát. $E(X) = ?$

8. Jelölje X az ötöslottón kihúzott lottószámoknál a párosak számát. Adjuk meg X várható értékét.

9. Két kockával dobunk. Egy ilyen dobást sikeresnek nevezünk, ha van 6-os a kapott számok között. Várhatóan hány sikeres dobásunk lesz n próbálkozásból?

10. Legyen X egy szabálytalan érmével (p a fej valószínűsége) végzett dobássorozatnál az első, azonosakból álló sorozat hossza. (Ha pl. a dobássorozat FIIIF... akkor X=1.) Számítsuk ki X várható értékét.

11. Tegyük fel, hogy egy adott területen és időszakban a hurrikánok száma Poisson folyamattal modellezhető. Várható értékben hetente 1 hurrikánra számíthatunk. Mi a valószínűsége, hogy egy hónap (4 hét) alatt legfeljebb 2 hurrikán lesz? Ha az egyes hurrikánok ereje p=1/5 valószínűséggel haladja meg a 2-es fokozatot, akkor várhatóan hány ilyen hurrikán lesz egy hónap alatt?

Házi feladat

1. a) Három kockával dobunk, Y jelöli a dobott számok közül a legnagyobbat. Adjuk meg Y eloszlását.

   b) Jelölje X az ötöslottón kihúzott lottószámoknál a legkisebbet. Adjuk meg X várható értékét.