Valószínűségszámítás és statisztika
2. gyakorlat
2015. 09. 18.

Információ

Az első ZH-t 2015. október 16-án írjuk, a gyakorlat termében és idejében.

Elmélet

[Szita-formula] Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges események, akkor

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k^{(n)},$$

ahol

$$S_k^{(n)} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_k}).$$

Legyen $S_0^{(n)} = 1$. Érvényes a következő, ekvivalens alak:

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k^{(n)}.$$

[Feltételes valószínűség] Ha B bekövetkezett, mi a valószínűsége, hogy A bekövetkezik? $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $(P(B) \neq 0)$

[Események függetlensége] A és B események függetlenek, ha $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (Az A esemény bekövetkezése nem befolyásolja a B esemény bekövetkezését, és fordítva).

[Teljes eseményrendszer (TER)] $B_1, B_2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha

- $B_i \cap B_j = \emptyset$ minden i≠j-re
- $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$

[Teljes valószínűség tétele] Legyen $B_1, B_2, \ldots$ teljes eseményrendszer, A tetszőleges esemény, $P(B_j) > 0, \forall j$. Ekkor

$$P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j) P(B_j)$$

.

[Bayes-tétel] Legyen $B_1, \ldots, B_n$ teljes eseményrendszer, A tetszőleges esemény, $P(B_j) > 0$ minden j-re. Ekkor

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) P(B_k)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j) P(B_j)}$$

.

[Valószínűségi változó] X: $\Omega \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, azaz amire $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ minden $B \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazra.

[Valószínűségi változó eloszlása] $Q_X(B) = P(X \in B) = P(\omega : X(\omega) \in B)$

Személyes adatok:

Név: Bondici László

E-mail: bondici@cs.elte.hu

Honlap: www.cs.elte.hu/∼bondici

[Diszkrét valószínűségi változó] Értékkészlete legfeljebb megszámlálhatóan végtelen, azaz $\{x_1, ..., x_n, ...\}$ elemekből áll. Ekkor eloszlása: $p_i := P(X = x_i) = P(\omega : X(\omega) = x_i)$

[Binomiális tétel] $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

[Geometriai sor összege] $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, ha |q|<1.

Konvergenciatartományon belül "be lehet deriválni" egy végtelen sort, így $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$, ha |q|<1.

Feladatok

1. Az ötös lottónál adjuk meg annak a valószínűségét, hogy egy szelvénnyel játszva öttalálatosunk lesz, illetve hogy legalább négyesünk lesz. Mi a valószínűsége, hogy minden kihúzott szám páros?
2. Mennyi a valószínűsége, hogy n kockadobás esetén a legnagyobb érték az 5?
3. Mennyi a valószínűsége, hogy egy lottóhúzásnál a legnagyobb kihúzott szám k?
4. Megírtunk 4 levelet 4 különböző személynek, majd borítékba tettük őket, a borítékokat véletlenszerűen megcímkéztük, majd postára adtuk. Mi a valószínűsége, hogy senki sem kapja meg a neki szánt levelet? (Tegyük fel, hogy minden levél megérkezik.)
5. Egy 4 emeletes ház földszintjén 10 ember száll be a liftbe, akik egymástól függetlenül bármely emeletre ugyanolyan eséllyel utazhatnak. Mi a valószínűsége, hogy minden emeleten megáll a lift?
6. 41 millió ötöslottó-szelvényt töltenek ki egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz legalább egy 5-ös találat?
7. Mennyi a valószínűsége, hogy két kockadobásnál mind a két dobás 6-os, feltéve, hogy tudjuk, hogy legalább az egyik dobás 6-os?
8. Egy játékos annyiszor lőhet egy léggömbre, ahány 6-ost dobott egymás után egy dobókockával (például, ha elsőre 6-ost, másodikra 2-est dob, akkor egyszer lőhet). Mennyi a valószínűsége, hogy szétlövi a léggömböt, ha egy lövésnél 1/1000 valószínűséggel talál?
9. Vándorlásai közben Odüsszeusz egy hármas útelágazáshoz ér. Az egyik út Athénbe, a másik Spártába, a harmadik Mükénébe vezet. Az athéniek kereskedő népség, szeretik ámítani a látogatókat, csak minden 3. alkalommal mondanak igazat. A mükénéiek egy fokkal jobbak: ők csak minden második alkalommal hazudnak. A szigorú spártai neveltetésnek köszönhetően a spártaiak becsületesek, ők mindig igazat mondanak. Odüsszeusznak fogalma sincs, melyik út merre vezet, így feldob egy kockát, egyenlő esélyt adva mindegyik útnak. Megérkezve a városba, megkérdez egy embert, mennyi 2×2, mire közlik vele, hogy 4. Mi a valószínűsége, hogy Odüsszeusz Athénba jutott?
10. 100 érme közül az egyik hamis (ennek mindkét oldalán fej van). Egy érmét kiválasztva és azzal 10-szer dobva, 10 fejet kaptunk. Ezen feltétellel mi a valószínűsége, hogy a hamis érmével dobtunk?

Házi feladat

1. a) Iszákos Iván a nap 2/3 részét kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsma van, és nem válogatós, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindultunk, hogy megkeressük. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy az ötödikben ott lesz?
   b) Egy diák a vizsgán p valószínűséggel tudja a helyes választ. Amennyiben nem tudja, akkor tippel (1/3 az esélye, hogy eltalálja). Ha helyesen válaszolt, mennyi a valószínűsége, hogy tudta is a helyes választ?