Valószínűségszámítás és statisztika
Házi feladatok

1. gyakorlat

HF1. Mutassuk meg, hogy amennyiben $A_1, ..., A_n$ tetszőleges események, akkor $P(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - n + 1$.

Megoldás: Kihasználjuk, hogy $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$.

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i) = 1 - \sum_{i=1}^{n}(1 - P(A_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - n + 1.$$

HF2. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kenóhúzás során (80-ból 20 kihúzása) legalább kétszer több a páros, mint a páratlan?

Megoldás: P(14 páros vagy 15 páros vagy ... vagy 20 páros)= $\sum\limits_{k=14}^{20} \frac{\binom{40}{k}\binom{40}{20-k}}{\binom{80}{20}}$.

2. gyakorlat

HF1. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 3 kockával kétszer dobva, mindkét esetben ugyanazt az eredményt kapjuk, ha

a) a kockák megkülönböztethetőek;

b) a kockák nem különböztethetőek meg?

Megoldás:

a) Legyen
B_{ijk}: az első dobás eredménye ijk (i,j,k=1,...6);
A: a második dobás eredménye megegyezik az elsőével.
P(B_{ijk})=$\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$; P($A|B_{ijk}$)= $\frac{1}{216}$.
Alkalmazzuk a teljes valószínűség tételét:
$$P(A) = \sum_{i,j,k=1}^{6} P(A|B_{ijk})P(B_{ijk}) = \sum_{i,j,k=1}^{6} \frac{1}{216} \cdot \frac{1}{216} = \frac{1}{216}.$$

b) Legyen
B_1: az első dobás eredménye: mindhárom különböző (pl. 123);
B_2: az első dobás eredménye: kettő különböző (pl. 112);
B_3: az első dobás eredménye: mindhárom ugyanaz (pl. 111);
A: a második dobás eredménye megegyezik az elsőével.
P(B_1)=$\frac{\binom{6}{3}\cdot 3!}{6^3} = \frac{120}{216}$ P(B_2)=$\frac{\binom{6}{2}\cdot 3\cdot 2}{6^3} = \frac{90}{216}$ P(B_3)=$\frac{\binom{6}{1}}{6^3} = \frac{6}{216}$
P($A|B_1$)=$\frac{6}{216}$ P($A|B_2$)=$\frac{3}{216}$ P($A|B_3$)=$\frac{1}{216}$
Alkalmazzuk a teljes valószínűség tételét:
$$P(A) = \sum_{j=1}^{3} P(A|B_j)P(B_j) = \frac{6}{216} \cdot \frac{120}{216} + \frac{3}{216} \cdot \frac{90}{216} + \frac{1}{216} \cdot \frac{6}{216} = \frac{996}{216^2}.$$

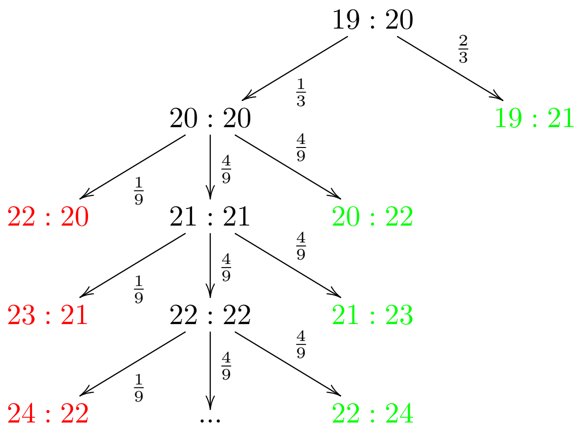
3. gyakorlat

HF1. b) Egy diák a vizsgán p valószínűséggel tudja a helyes választ. Amennyiben nem tudja, akkor tippel (1/3 az esélye, hogy eltalálja). Ha helyesen válaszolt, mennyi a valószínűsége, hogy tudta is a helyes választ?

Megoldás: Legyen A: helyesen válaszolt; B_1: tudta a választ; B_2: nem tudta a választ.
P(B_1)=p P($A|B_1$)=1
P(B_2)=$1 - p$ P($A|B_2$)=$\frac{1}{3}$
Alkalmazzuk a Bayes-tételt:
$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)} = \frac{1\cdot p}{1\cdot p + \frac{1}{3}\cdot(1-p)} = \frac{3p}{2p+1}$$

HF2. b) Aladár és Béla pingpongoznak. Minden labdamenetet, egymástól függetlenül, 1/3 valószínűséggel Aladár, 2/3 valószínűséggel Béla nyer meg. A jelenlegi állás 20:19 Béla javára. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a meccset mégis Aladár nyeri meg? (Az nyer, akinek sikerül legalább két pontos előny mellett legalább 21 pontot szerezni.)

Megoldás: Az ábra mutatja a játék lehetséges kimeneteleit, Aladár:Béla sorrendben. A piros kimenetek azt mutatják, amikor Aladár nyert, a zöld azt, amikor Béla.



Az egyes labdamenetek egymástól függetlenek, így

P(Aladár nyer)=$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{9} + ... = \frac{1}{27} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k =$

$\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{1}{15}$.

4. gyakorlat

F7. Iszákos Iván a nap 2/3 részét kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsma van, és nem válogatós, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy az ötödikben ott lesz?

Megoldás: Legyen A: egy adott időpillanatban kocsmában van; B_i: az i. kocsmában van (i=1,...,5).

Így P(A)=$\frac{2}{3}$ és P(B_i|A)=$\frac{1}{5}$.

Ebből P(B_i)=P(B_i|A)P(A)=$\frac{1}{5}\frac{2}{3} = \frac{2}{15}$.

A keresett valószínűség: P$(B_5|(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4})) = \frac{P(B_5 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4})}{P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4})} =$

$= \frac{P(B_5)}{P(\overline{B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4})} = \frac{P(B_5)}{1-(P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)+P(B_4))} = \frac{\frac{2}{15}}{1-4 \cdot \frac{2}{15}} = \frac{2}{7}$.