Valószínűségszámítás és statisztika
8. gyakorlat
2014. 11. 13.

Elmélet

[Torzítatlan becslés:] T($\mathbf{X}$) statisztika torzítatlan becslése θ-nak, ha $E_\theta T(\mathbf{X}) = \theta \quad \forall\theta$-ra.

[Val. változó függvényének várható értéke:] Legyen X val. változó; g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor

- $E(g(X)) = \sum\limits_k g(x_k)p_k$, ha X diszkrét
- $E(g(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx$, ha X abszolút folytonos

Mindkét esetben a várható érték létezéséhez a szumma/integrál abszolút konvergenciájára van szükség.

[Abszolút folytonos val.változó szigorúan monoton függvényének eloszlás- és sűrűségfüggvénye]
Legyen X abszolút folytonos val. változó; g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton, folytonosan differenciálható függvény. Ekkor

a) Y=g(X) eloszlásfüggvénye:

$$F_Y(y) = F_{g(X)}(y) = \begin{cases} F_X(g^{-1}(y)) & \text{ha g szig. mon. növő} \\ 1 - F_X(g^{-1}(y)) & \text{ha g szig. mon. csökkenő} \end{cases}$$

b) Y=g(X) sűrűségfüggvénye:

$$f_Y(y) = f_{g(X)}(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left|[g^{-1}(y)]'\right| = \tfrac{f_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|}$$

[Normálás, standardizálás] Legyen X$\sim N(m, \sigma^2)$. Ekkor
$\frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1); \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x); \quad \Phi^{-1}(q) = -\Phi^{-1}(1-q),\ 0 < q < 1.$

[Véges sok független val. változó összege] Legyenek $X_1, ..., X_n$, X és Y *független* val. változók.

- $X_1 \sim \text{Ind}(p), ..., X_n \sim \text{Ind}(p) \Rightarrow X_1 + ... + X_n \sim \text{Bin}(n,p)$
- $X \sim \text{Bin}(n,p), Y \sim \text{Bin}(m,p) \Rightarrow X + Y \sim \text{Bin}(n+m,p)$
- $X_1 \sim \text{Geo}(p), ..., X_n \sim \text{Geo}(p) \Rightarrow X_1 + ... + X_n \sim \text{NegBin}(n,p)$
- $X \sim \text{Poi}(\lambda_1), Y \sim \text{Poi}(\lambda_2) \Rightarrow X + Y \sim \text{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2)$
- $X \sim N(m_1, \sigma_1^2), Y \sim N(m_2, \sigma_2^2) \Rightarrow X + Y \sim N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Feladatok

1. (7-es feladatsor 8-as feladata) Legyen Z eloszlása: $P(Z = 1) = c, P(Z = 2) = 3c, P(Z = 3) = 1 - 4c$. ($c$ az ismeretlen paraméter).

   a) Határozzuk meg Z várható értékét és szórását.

   b) Adjunk torzítatlan becslést c-re Z_1 , illetve a $Z_1, Z_2, ...Z_n$ minta segítségével!

2. Véletlenszerűen választunk egy pontot az $x^2 + y^2 < 1$ kör belsejében. Jelölje Z a távolságát a középponttól. Adjuk meg Z eloszlás- és sűrűségfüggvényét, valamint várható értékét és szórásnégyzetét.

3. Legyen X sűrűségfüggvénye $\frac{c}{x^4}$, ha $0 < x$, és 0 különben.

   a) Határozzuk meg c értékét.

Személyes adatok:
Név: Bondici László
E-mail: bondici@cs.elte.hu
Honlap: www.cs.elte.hu/$\sim$bondici

b) EX = ?.

c) D^2X=?

4. Legyen X standard normális eloszlású. Adjuk meg

a) $Y = \mathrm{e}^X$

b) $Y = X^2$

sűrűségfüggvényét és várható értékét. P(Y<1)=?

5. Legyen X egyenletes eloszlású az $(1, 4)$ intervallumon Számítsuk ki $(X - 1)^2$ várható értékét.

6. Legyen X exponenciális eloszlású $\lambda = 1$ paraméterrel. Adjuk meg $1 - \mathrm{e}^{-X}$ sűrűségfüggvényét és várható értékét.

7. Tegyük fel, hogy az egyetemisták IQ teszten elért eredménye normális eloszlású 105 várható értékkel és 10 szórással. Mi a valószínűsége, hogy valaki 120-nál több pontot ér el a teszten?

8. Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100g várható értékkel és 3g szórással, valamint, hogy az egyes táblák tömege egymástól független. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0.9 valószínűséggel nagyobb legyen 99.5 g-nál?

Házi feladatok

1. Tegyük fel, hogy a valszám jegyekre vonatkozó eddigi 3 megfigyelésünk: 2,3,5. A negyedik megfigyelés mely értékére lesz a tapasztalati szórás

a) a legnagyobb;

b) a legkisebb?

Milyen torzítatlan becslést tudunk adni a 3 megfigyelés alapján a szórásnégyzetre?

2. Mennyi garanciát adjunk, ha azt szeretnénk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető?