Valószínűségszámítás és statisztika
7. gyakorlat
2014. 11. 06.

Elmélet

[Nevezetes diszkrét eloszlások:]

Eloszlás neve	Jelölése	Eloszlása	EX	D^2X
Karakterisztikus (indikátorvált.)	Ind(p)	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
Geometriai (Pascal)	Geo(p)	$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ k=1,2,...	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Hipergeometriai	Hipgeo(N,M,n)	$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ k=0,1,...,n	$n\frac{M}{N}$	$n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$
Binomiális	Bin(n,p)	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ k=0,1,...,n	np	$np(1-p)$
Negatív binomiális	NegBin(n,p)	$P(X=k)=\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$ k=n,n+1,...	$\frac{n}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$
Poisson	Poi(λ)	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ k=0,1,...	λ	λ

Előfordulásuk:

- Indikátor változó: egy p valószínűségű esemény bekövetkezik-e vagy sem
- Geometriai: hányadikra következik be először egy p valószínűségű esemény
- Hipergeometriai: visszatevés nélküli mintavétel
- Binomiális: visszatevéses mintavétel
- Negatív binomiális: hányadikra következik be n. alkalommal egy p valószínűségű esemény

[X val.változó eloszlásfüggvénye:] $F_X(x) = P(X < x)$. Amennyiben egyértelmű, melyik val.változó eloszlásfüggvényéről van szó, F(x)-et írunk.

[Az eloszlásfüggvény tulajdonságai:]
(I.) $0 \le F_X(x) \le 1$; (II.) monoton növő; (III.) balról folytonos; (IV.) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.

[Tetszőleges X val.változó esetén:] $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$; $P(a < X \le b) = F(b+) - F(a+)$.

[Absz. folyt. val. vált. sűrűségfüggvénye:] X val.változó abszolút folytonos, ha létezik olyan f(x) függvény, amelyre $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Ilyenkor f(x)-et *sűrűségfüggvény*nek hívjuk.
Legyen X abszolút folytonos eloszlású. Ekkor
f(x)=F'(x); f(x) ≥ 0; $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$; $P(X = x) = 0 \quad \forall x$-re; $P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

[Abszolút folytonos val.változó várható értéke:] $EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$.

[Abszolút folytonos val.változó l. momentuma:] $EX^l = \int_{-\infty}^{\infty} x^l f(x)\,dx$.

[Torzítatlan becslés:] T($\mathbf{X}$) statisztika torzítatlan becslése θ-nak, ha $E_\theta T(\mathbf{X}) = \theta \quad \forall\theta$-ra.

Személyes adatok:
Név: Bondici László
E-mail: bondici@cs.elte.hu
Honlap: www.cs.elte.hu/∼bondici

[Nevezetes abszolút folytonos eloszlások:]

Eloszlás neve	Jelölése	Eloszlásfüggvény	Sűrűségfüggvény	EX	D^{2}X
Egyenletes	E(a,b)	$\begin{cases} 0 & \text{ha } x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \le b \\ 1 & \text{ha } b < x \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a < x \le b \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponenciális	Exp(λ)	$\begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & \text{ha } x \ge 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \ge 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Standard normális	N$(0,1^2)$	$\Phi(x) = ...$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \in \mathbb{R}$	0	1
Normális	N(m,σ^2)	...	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2

Feladatok

1. (5-ös feladatsor 9-es feladata) Tegyük fel, hogy egy adott területen és időszakban a hurrikánok száma Poisson folyamattal modellezhető. Várható értékben hetente 1 hurrikánra számíthatunk. Mi a valószínűsége, hogy 4 hét alatt legfeljebb 2 hurrikán lesz? Ha az egyes hurrikánok ereje p=1/5 valószínűséggel haladja meg a 2-es fokozatot, akkor várhatóan hány ilyen hurrikán lesz egy hónap alatt?
2. 5-ször dobunk egy szabályos kockával. X a 6-osok száma. $D^2(X) =$?
3. Legyen $0 < Y < 3$ valószínűségi változó. Eloszlásfüggvénye ezen az intervallumon $F(x) = cx^3$. Mennyi c és $P(-1 < Y < 1)$?
4. Eloszlásfüggvények-e a következő függvények?
   a) $F(x) = 1 - (\frac{c}{x})^a$, ha $x > c$, és 0 különben ($a, c > 0$);
   b)
   $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha x<0;} \\ \frac{[x]}{2}, & \text{ha 0<x<2;} \\ 1, & \text{ha x>2.} \end{cases}$$
5. Legyen az X valószínűségi változó exponenciális eloszlású. Mi lesz $-ln(X)$ sűrűségfüggvénye?
6. Legyen X sűrűségfüggvénye cx^4, ha $0 < x < 1$, és 0 különben.
   a) $c =$?
   b) $P(X < 0.5) =$?
7. Egy egyszerű csapadék-modell lehet a következő: annak az esélye, hogy egy adott napon nem lesz csapadék, 0.6. Ha van csapadék, akkor a mennyisége exponenciális eloszlású, $\lambda = 2$ paraméterrel. Adjuk meg a csapadékmennyiség eloszlásfüggvényét. Mi a valószínűsége, hogy legalább 1 mm csapadék lesz? Abszolút folytonos-e az eloszlás?
8. Legyen Z eloszlása: $P(Z = 1) = c, P(Z = 2) = 3c, P(Z = 3) = 1 - 4c$. ($c$ az ismeretlen paraméter).
   a) Határozzuk meg Z várható értékét és szórását.
   b) Adjunk torzítatlan becslést c-re Z_1 , illetve a $Z_1, Z_2, ...Z_n$ minta segítségével!

Házi feladatok

1. a) Számítsuk ki az $1, 2, ..., N$ számokon egyenletes eloszlás szórásnégyzetét.
   b) Legyen az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon. Mi lesz $-ln(X)$ sűrűségfüggvénye?
2. Tegyük fel, hogy a valszám jegyekre vonatkozó eddigi 3 megfigyelésünk: 2,3,5. A negyedik megfigyelés mely értékére lesz a tapasztalati szórás
   a) a legnagyobb;
   b) a legkisebb?

   Milyen torzítatlan becslést tudunk adni a 3 megfigyelés alapján a szórásnégyzetre?