Valószínűségszámítás és statisztika
3. gyakorlat
2014. 09. 25.

Elmélet

[Feltételes valószínűség] Ha B bekövetkezett, mi a valószínűsége, hogy A bekövetkezik? $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $(P(B) \neq 0)$

[Események függetlensége] A és B események függetlenek, ha $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (Az A esemény bekövetkezése nem befolyásolja a B esemény bekövetkezését, és fordítva).

[Teljes eseményrendszer (TER)] $B_1, B_2, ...$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha

- $B_i \cap B_j = \emptyset$ minden i≠j-re
- $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$

[Teljes valószínűség tétele] Legyen $B_1, B_2, ...$ teljes eseményrendszer, A tetszőleges esemény, $P(B_j) > 0, \forall j$. Ekkor

$$P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j)$$

.

[Bayes-tétel] Legyen $B_1, ..., B_n$ teljes eseményrendszer, A tetszőleges esemény, $P(B_j) > 0$ minden j-re. Ekkor

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j)}$$

.

[Valószínűségi változó] X: $\Omega \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, azaz amire $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ minden $B \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazra.

[Valószínűségi változó eloszlása] $Q_X(B) = P(X \in B) = P(\omega : X(\omega) \in B)$

[Diszkrét valószínűségi változó] Értékkészlete legfeljebb megszámlálhatóan végtelen, azaz $\{x_1, ..., x_n, ...\}$ elemekből áll. Ekkor eloszlása: $p_i := P(X = x_i) = P(\omega : X(\omega) = x_i)$

[Binomiális tétel] $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

[Geometriai sor összege] $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, ha |q|<1.

Konvergenciatartományon belül "be lehet deriválni" egy végtelen sort, így $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$, ha |q|<1.

Feladatok

1. Milyen $n > 1$-re lesz független
   a) az a két esemény, hogy n érmedobásból A: van fej és írás is, valamint B: legfeljebb egy írás van?
   b) az a két esemény, hogy n érmedobásból A: van fej és írás is, valamint B: az első dobás fej?

Személyes adatok:

Név: Bondici László

E-mail: bondici@cs.elte.hu

Honlap: www.cs.elte.hu/∼bondici

2. 41 millió ötöslottó-szelvényt töltenek ki egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz legalább egy 5-ös találat?

3. Mennyi a valószínűsége, hogy két kockadobásnál mind a két dobás 6-os, feltéve, hogy tudjuk, hogy legalább az egyik dobás 6-os?

4. 100 érme közül az egyik hamis (ennek mindkét oldalán fej van). Egy érmét kiválasztva és azzal 10-szer dobva, 10 fejet kaptunk. Ezen feltétellel mi a valószínűsége, hogy a hamis érmével dobtunk?

5. Vándorlásai közben Odüsszeusz egy hármas útelágazáshoz ér. Az egyik út Athénbe, a másik Spártába, a harmadik Mükénébe vezet. Az athéniek kereskedő népség, szeretik ámítani a látogatókat, csak minden 3. alkalommal mondanak igazat. A mükénéiek egy fokkal jobbak: ők csak minden második alkalommal hazudnak. A szigorú spártai neveltetésnek köszönhetően a spártaiak becsületesek, ők mindig igazat mondanak. Odüsszeusznak fogalma sincs, melyik út merre vezet, így feldob egy kockát, egyenlő esélyt adva mindegyik útnak. Megérkezve a városba, megkérdez egy embert, mennyi 2×2, mire közlik vele, hogy 4. Mi a valószínűsége, hogy Odüsszeusz Athénba jutott?

6. Egy érmével annyiszor dobunk, mint amennyi egy szabályos kockadobás eredménye. Mi a valószínűsége, hogy nem kapunk fejet?

7. Adjuk meg annak a valószínűségi változónak az eloszlását, ami egy hatgyermekes családban a fiúk számát adja meg. (Tegyük fel, hogy mindig 50%-50% a fiúk, ill. a lányok születési valószínűsége.)

8. Egy 4 emeletes ház földszintjén 10 ember száll be a liftbe, akik egymástól függetlenül bármely emeletre ugyanolyan eséllyel utazhatnak. Mi a valószínűsége, hogy minden emeleten megáll a lift?

9. A sarki boltban vásárlásunk után újságot kapunk ajándékba. 10 fajta ilyen újság van, mindegyik egyformán gyakori. Mennyi a valószínűsége, hogy a 20. vásárlásnál lesz meg mind a 10 újságunk?

Házi feladatok

1. a) Két kockadobásból az első eredményét jelöljük X-szel, a másodikét Y-nal. A következő eseményeket vizsgáljuk:
   - A_1: 2 osztója X-nek, 3 Y-nak;
   - A_2: 2 osztója Y-nak, 3 X-nek;
   - A_3: Y osztója X-nek;
   - A_4: X osztója Y-nak;
   - A_5: 2 osztója $X + Y$-nak.

   Melyek lesznek közülük függetlenek?

   b) Egy diák a vizsgán p valószínűséggel tudja a helyes választ. Amennyiben nem tudja, akkor tippel (1/3 az esélye, hogy eltalálja). Ha helyesen válaszolt, mennyi a valószínűsége, hogy tudta is a helyes választ?

2. a) A 32 lapos magyar kártyacsomagból kihúzunk 7 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között mind a négy szín előfordul (a csomagban minden színből 8-8 lap van)?

   b) Aladár és Béla pingpongoznak. Minden labdamenetet, egymástól függetlenül, 1/3 valószínűséggel Aladár, 2/3 valószínűséggel Béla nyer meg. A jelenlegi állás 20:19 Béla javára. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a meccset mégis Aladár nyeri meg? (Az nyer, akinek sikerül legalább két pontos előny mellett legalább 21 pontot szerezni.)