Segédanyag a Valószínűségszámítás (mat. elemző, prog. inf. A szakirány) tantárgyhoz
2016. október 15.

Permutáció: n elem összes lehetséges sorrendje: $n!$
Ismétléses permutáció: n elem összes lehetséges sorrendje, ha ezek közül $k_1, \ldots, k_m$ darab megegyezik: $\frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_m!}$

Adott n elem, ebből k darabot kiveszünk.

	Kombináció: a kihúzás sorrendje NEM számít (nem számozottak az elemek)	**Variáció**: a kihúzás sorrendje számít (számozottak az elemek)
Visszatevés/ismétlés nélkül	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Visszatevéssel/ismétléssel	$\binom{n+k-1}{k}$	n^k

Definíció. **Véges valószínűségi mező:** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármas, ahol
- $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\} = \Omega$: eseménytér; elemei: elemi események
- $\{A, B, \ldots\} = \mathcal{A} = 2^\Omega$, ahol $A, B, \ldots \subseteq \Omega$: események
- P: valószínűség
  - $P(\Omega) = 1$
  - $P(A) \geq 0$ minden A eseményre
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ minden A és B egymást kizáró ($A \cap B = \emptyset$) es.-re.

Definíció. **σ-algebra:** Legyen $\Omega \neq \emptyset$ halmaz, $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$. Az $\mathcal{A}$ halmaz σ-algebra, ha
- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \in \mathcal{A}$ (zárt a komplementer képzésre)
- $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$ (zárt a megszámlálható unióra)

Definíció. **Kolmogorov-féle valószínűségi mező:** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármas, ahol
- Ω: nemüres halmaz
- $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ σ-algebra
- P: $\mathcal{A} \to [0; 1]$ halmazfüggény, amelyre
  - $P(\Omega) = 1$
  - $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$-ra
  - páronként kizáró $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ eseményekre $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Jelölje az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz Lebesgue-mértékét $\lambda(A)$. Ha $n = 1$, akkor a Lebesgue-mérték a hossz, $n = 2$-nél a terület, $n = 3, 4, \ldots$ esetén pedig a térfogat.

Definíció. **Geometriai vsz.-i mező:** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármas, ahol:
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda(\Omega) < \infty$
- $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : A \subset \mathbb{R}^n\}$
- $P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\text{"kedvező" terület}}{\text{összes terület}}$.

Állítás. Legyenek A és B tetszőleges események. Ekkor
- $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ tetszőleges események és $S_k^{(n)} = \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$.

Tétel. **Szita formula vagy Poincaré-formula:**
$P(A_1, \ldots, A_n$ közül legalább 1 bekövetkezik$) = P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k^{(n)}$

Tétel. **Jordán-formula:**
$P(A_1, \ldots, A_n$ közül pontosan r darab következik be$) = \sum\limits_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{r+k}{k} S_{r+k}^{(n)}$.

Mintavétel: Adott N termék, ezek közül M selejtes. Az összes termékből kiveszünk n darabot. Mi a valószínűsége, hogy ezek között k selejtes lesz? ($k = 0, 1, \ldots, n$)
- Visszetevés nélkül: $\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
- Visszatevéssel: $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ ahol $p = \frac{M}{N}$ a selejtarány

---

Feltételes valószínűség: Ha B bekövetkezett, mi a valószínűsége, hogy A bekövetkezik?
$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (P(B) \neq 0)$

Definíció. **Teljes eseményrendszer (TER):** $B_1, B_2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha
- $B_i \cap B_j = \emptyset$ minden i≠j-re,
- $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$.

Tétel. **Teljes valószínűség tétele:** Legyen $B_1, B_2, \ldots$ teljes eseményrendszer, $P(B_j) > 0$ minden j-re; A tetszőleges esemény.
Ekkor $P(A) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} P(A|B_j) P(B_j)$.

Tétel. **Bayes-tétel:** Legyen $B_1, B_2, \ldots$ teljes eseményrendszer, $P(B_j) > 0$ minden j-re; A tetszőleges esemény, amire $P(A) > 0$.
Ekkor $P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j)}$.

Definíció. **Események függetlensége:** A és B események függetlenek, ha $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (A esemény bekövetkezése nem befolyásolja B esemény bekövetkezését, és fordítva).

Definíció. **Események teljes függetlensége:** Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események teljesen függetlenek, ha $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$ minden $2 \leq k \leq n$-re és $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$-re.

Definíció. **Generált σ-algebra:** Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^{\mathbb{R}^d}$ tetszőleges halmazrendszer. Az $\mathcal{F}$

által generált σ-algebra az a legszűkebb σ-algebra, ami tartalmazza az $\mathcal{F}$ halmazrendszert. Jelölése: $\sigma(\mathcal{F})$

Definíció. $\mathbb{R}^d$ **Borel-halmazai:** $\mathbb{R}^d$ összes nyílt halmaza által generált σ-algebra. Jelölése: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

Definíció. **Valószínűségi változó:** X: $\Omega \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvény, azaz amire $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ minden $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ halmazra.

Definíció. **Valószínűségi változó eloszlása:**
$Q_X(B) \overset{Def.}{=} P(X \in B) = P(X^{-1}(B)) = P(\omega : X(\omega) \in B)$, ahol $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definíció. **Diszkrét val. változó:** értékkészlete legfeljebb megszámlálhatóan végtelen, azaz $\{x_1, x_2, \ldots\}$ elemekből áll. Ekkor eloszlását egyértelműen meghatározzák a $p_i := P(X = x_i) = P(X^{-1}(\{x_i\})) = P(\omega : X(\omega) = x_i)$ valószínűségek, ahol $i = 1, 2, \ldots$

Tétel. **Binomiális tétel:** $(a + b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.

Állítás. **Geometriai sor összege:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, ha $1 > |q| \in \mathbb{R}$. Konvergenciatartományon belül "be lehet deriválni" egy végtelen sort, így $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$, ha $|q| < 1$.

Definíció. **Diszkrét val. változó várható értéke.**
Legyen X diszkrét val. vált., ami az $x_1, x_2, \ldots$ értékeket veszi fel, $p_1, p_2, \ldots$ vsz.-ekkel. Ekkor X várható értéke: $EX = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_k p_k$, ha a végtelen összeg abszolút konvergens.

Definíció. **Diszkrét val. változó** l. **momentuma:** $EX^l = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (x_k)^l p_k$, ha a végtelen összeg abszolút konvergens.

Definíció. X **szórásnégyzete:** $D^2X \overset{\text{Def.}}{=} E[(X - EX)^2] \overset{\text{Áll.}}{=} EX^2 - E^2X$.
Definíció. X **szórása:** $DX = \sqrt{D^2X}$.

Nevezetes diszkrét eloszlások:

Eloszlás neve	Jelölése	Eloszlása	EX	D^2X
Indikátor (karakterisztikus, Bernoulli)	$\mathrm{Ind}(p)$	$P(X = 1) = p$ $P(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1 - p)$
Hipergeometriai	$\mathrm{Hipgeo}(N, M, n)$	$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ $k = 0, 1, \ldots, \min(n, M)$	$n\frac{M}{N}$	$n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$
Binomiális	$\mathrm{Bin}(n, p)$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ $k = 0, 1, \ldots, n$	np	$np(1 - p)$
Geometriai (Pascal)	$\mathrm{Geo}(p)$	$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$ $k = 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Negatív binomiális	$\mathrm{NegBin}(n, p)$	$P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1 - p)^{k-n}$ $k = n, n + 1, \ldots$	$\frac{n}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$
Poisson	$\mathrm{Poi}(\lambda)$	$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ $k = 0, 1, \ldots$	λ	λ

Előfordulásuk:

- Indikátor: egy p valószínűségű esemény bekövetkezik-e vagy sem
- Hipergeometriai: visszatevés nélküli mintavételnél a selejtesek száma
- Binomiális: visszatevéses mintavételnél a selejtesek száma; vagy független kísérleteknél a sikeresek száma, ha $p = P(\text{az } i. \text{ kísérlet sikeres})$
- Geometriai: hányadikra következik be először egy p valószínűségű esemény
- Negatív binomiális: hányadikra következik be n. alkalommal egy p vsz.-ű es.
- Poisson: ritka események bekövetkezésének modellezésére használják

Állítás. Legyenek $X, Y, X_1, \ldots, X_n$ val. vált.-k véges várható értékkel; $a, a_i, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $E(aX + bY) = aEX + bEY$
- $E\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i E X_i$
- $D^2(aX + b) = a^2 D^2 X$

Definíció. X **val. vált. eloszlásfüggvénye:** $F_X(x) \overset{Def.}{=} P(X < x) = P(X \in (-\infty, x))$. Ha egyértelmű, melyik val. változó eloszlásfüggvényéről van szó, $F(x)$-et írunk.

Állítás. **Az eloszlásfüggvény tulajdonságai:**

- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$
- monoton növő
- balról folytonos
- $0 \le F_X(x) \le 1$

Állítás. Tetszőleges X valószínűségi változó esetén

- $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$
- $P(a < X \le b) = F(b+) - F(a+)$

Definíció. Az X valószínűségi változó **abszolút folytonos**, ha létezik olyan $f(x)$ függvény, amelyre $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Ilyenkor $f(x)$-et **sűrűségfüggvény**nek hívjuk.

Nevezetes abszolút folytonos eloszlások:

Eloszlás neve	Jelölése	Eloszlásfüggvény	Sűrűségfüggvény	EX	D^2X
Egyenletes	$E(a, b)$	$\begin{cases} 0 & \text{ha } x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \le b \\ 1 & \text{ha } b < x \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a < x \le b \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Standard normális	$N(0, 1^2)$	$\Phi(x) = \ldots$	$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $x \in \mathbb{R}$	0	1
Normális	$N(m, \sigma^2)$	$\ldots$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ $x \in \mathbb{R}$	m	σ^2
Exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x \ge 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \ge 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma	$\Gamma(\alpha, \lambda)$	$\ldots$	$\begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & \text{ha } x \ge 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$

Állítás. Legyen X abszolút folytonos eloszlású. Ekkor

- $f(x) \ge 0$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
- $f(x) = F'(x)$ (ahol F deriválható)

- $P(X=x)=0 \quad \forall x$-re
- $P(a<X\leq b)=P(a\leq X<b)=F(b)-F(a)$

Definíció. Abszolút folytonos val. változó várható értéke: $EX=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$.

Definíció. Abszolút folytonos val. változó l. momentuma: $EX^l=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^l f(x)\,dx$.

Állítás. $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

Állítás. $\Phi^{-1}(q)=-\Phi^{-1}(1-q) \qquad 0<q<1$

Definíció. **Szemifaktoriális:** $n!!=\begin{cases} n\cdot(n-2)\cdot(n-4)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2 & \text{ha } n\in\mathbb{Z}^+ \text{ páros}\\ n\cdot(n-2)\cdot(n-4)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1 & \text{ha } n\in\mathbb{Z}^+ \text{ páratlan}\end{cases}$

Állítás. Legyen $X\sim N(0,1)$. Ekkor $EX^n=\begin{cases}(n-1)!! & \text{ha } n\in\mathbb{Z}^+ \text{ páros}\\ 0 & \text{ha } n\in\mathbb{Z}^+ \text{ páratlan}\end{cases}$

Tétel. **Teljes várható érték tétel:** Legyen $B_1,B_2,\ldots$ teljes eseményrendszer, $P(B_j)>0$ minden j-re; X egy valószínűségi változó.
Ekkor $EX=\sum\limits_{i=1}^{\infty} E(X|B_i)P(B_i)$, ahol
$E(X|B_i)$: X várható értéke akkor, ha B_i esemény bekövetkezett.

Állítás. **Valószínűségi változó függvényének várható értéke.**
Legyen X valószínűségi változó; g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény. Ekkor
- $E(g(X))=\sum\limits_k g(x_k)p_k$, ha X diszkrét
- $E(g(X))=\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx$, ha X abszolút folytonos

Mindkét esetben a várható érték létezéséhez a szumma/integrál abszolút konvergenciájára van szükség.

Állítás. **Abszolút folytonos val.változó szigorúan monoton függvényének eloszlás- és sűrűségfüggvénye.**
Legyen X abszolút folytonos val. változó; $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ szigorúan monoton, folytonosan differenciálható függvény. Ekkor
- $Y=g(X)$ eloszlásfüggvénye:
$$F_Y(y)=F_{g(X)}(y)=\begin{cases}F_X(g^{-1}(y)) & \text{ha } g \text{ szigorúan monoton növő}\\ 1-F_X(g^{-1}(y)) & \text{ha } g \text{ szigorúan monoton csökkenő}\end{cases}$$
- $Y=g(X)$ sűrűségfüggvénye:
$$f_Y(y)=f_{g(X)}(y)=f_X(g^{-1}(y))\cdot\left|[g^{-1}(y)]'\right|=\frac{f_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|}$$

Megjegyzés. Ha g nem monoton, akkor vigyázni kell, javasolt először az eloszlásfüggvényt kiszámolni, utána pedig deriválással megkapjuk a sűrűségfüggvényt. A nehéz lépés annak a meggondolása, hogy a $g(X)<y$ esetén mit tudunk az X-ről, hogyan tudjuk ezt X-re rendezni, és hogyan transzformálódik az a halmaz, ahol a sűrűségfüggvény nem volt 0.

Állítás. **Normálás/standardizálás:** Legyen X tetszőleges valószínűségi változó. Ekkor az $Y=\frac{X-EX}{DX}$ valószínűségi változó várható értéke 0 és szórása 1.

Állítás. Legyen X$\sim N(m,\sigma^2)$. Ekkor $\frac{X-m}{\sigma}\sim N(0,1)$.

Definíció. **Valószínűségi változók konvolúciója:** Legyenek X és Y független valószínűségi változók. X és Y konvolúciójának az $U=X+Y$ val. változót nevezzük.

Állítás. **A konvolúció meghatározása.**
- Diszkrét, nemnegatív egész eset: $P(X+Y=k)=\sum\limits_{l=0}^{\infty} P(X=l)\cdot P(Y=k-l)$
- Folytonos eset: $f_{X+Y}(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(u)f_Y(z-u)du$

Állítás. Legyenek $X_1,\ldots,X_n$, X és Y független val. változók
- $X_1\sim\text{Ind}(p),\ldots,X_n\sim\text{Ind}(p) \quad\Rightarrow\quad X_1+\ldots+X_n\sim\text{Bin}(n,p)$
- $X\sim\text{Bin}(n,p)$, $Y\sim\text{Bin}(m,p) \quad\Rightarrow\quad X+Y\sim\text{Bin}(n+m,p)$
- $X_1\sim\text{Geo}(p),\ldots,X_n\sim\text{Geo}(p) \quad\Rightarrow\quad X_1+\ldots+X_n\sim\text{NegBin}(n,p)$
- $X\sim\text{NegBin}(n,p)$, $Y\sim\text{NegBin}(m,p) \quad\Rightarrow\quad X+Y\sim\text{NegBin}(n+m,p)$
- $X\sim\text{Poi}(\lambda_1)$, $Y\sim\text{Poi}(\lambda_2) \quad\Rightarrow\quad X+Y\sim\text{Poi}(\lambda_1+\lambda_2)$
- $X\sim N(m_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(m_2,\sigma_2^2) \quad\Rightarrow\quad X+Y\sim N(m_1+m_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$
- $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$, $Y\sim\Gamma(\beta,\lambda) \quad\Rightarrow\quad X+Y\sim\Gamma(\alpha+\beta,\lambda)$

Definíció. **Valószínűségi vektorváltozó:** $\mathbf{X}$: $\Omega\to\mathbb{R}^d$ mérhető függvény, azaz amire $\{\omega:\mathbf{X}(\omega)\in B\}\in\mathcal{A}$ minden $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ halmazra.

Definíció. **Valószínűségi vektorváltozó eloszlása:**
$Q_{\mathbf{X}}(B)=P(\mathbf{X}\in B)=P(\omega:\mathbf{X}(\omega)\in B), \quad$ ahol $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

Definíció. **X valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye:**
$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\overset{Def.}{=}P(\mathbf{X}<\mathbf{x})=P(X_1<x_1,\ldots,X_d<x_d)=P(X_1\in(-\infty,x_1),\ldots,X_d\in(-\infty,x_d))$

Állítás. **Az eloszlásfüggvény tulajdonságai:**
- $\lim\limits_{x_1,\ldots,x_d\to\infty} F_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_d)=1$ és $\lim\limits_{x_i\to-\infty} F_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_d)=0$ minden i-re
- minden koordinátájában monoton növő
- minden koordinátájában balról folytonos
- $0\leq F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\leq 1$

Állítás. Tetszőleges X és Y valószínűségi változók esetén
$P(a\leq X<b,\ c\leq Y<d)=F_{X,Y}(b,d)-F_{X,Y}(a,d)-F_{X,Y}(b,c)+F_{X,Y}(a,c)$

Definíció. **X valószínűségi vektorváltozó abszolút folytonos,** ha létezik olyan $f_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_d)$ függvény, amelyre $F_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_d)=\int\limits_{-\infty}^{x_1}\ldots\int\limits_{-\infty}^{x_d} f_{\mathbf{X}}(t_1,\ldots,t_d)\,dt_1\ldots dt_d$.
Ilyenkor $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$-et **sűrűségfüggvény**nek hívjuk.
Mostantól $d=2$ lesz, és a következő jelöléseket és elnevezéseket használjuk:

- $F_{X,Y}(x,y) = P(X < x, Y < y)$ $\rightsquigarrow$ együttes eloszlásfüggvény
- $F_X(x) = P(X < x)$, $F_Y(y) = P(Y < y)$ $\rightsquigarrow$ peremeloszlásfüggvények
- $f_{X,Y}(x,y)$ $\rightsquigarrow$ együttes sűrűségfüggvény
- $f_X(x), f_Y(y)$ $\rightsquigarrow$ peremsűrűségfüggvények

Állítás. **Az együttes és a peremeloszlás és -sűrűségfüggvények tulajdonságai.**

- $F_X(x) = \lim\limits_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y)$ és $F_Y(y) = \lim\limits_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y)$
- $F_{X,Y}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,v)\,dudv$
- $f_{X,Y}(x,y) = \partial_y\partial_x F_{X,Y}(x,y) = \partial_x\partial_y F_{X,Y}(x,y)$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 1$
- $f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$ és $f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$
- $P(a \le X < b,\ c \le Y < d) = \int\limits_a^b\int\limits_c^d f_{X,Y}(u,v)\,dudv$

Definíció. **Valószínűségi változó által generált σ-algebra:**
$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \{\omega : X(\omega) \in B : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

Definíció. **Valószínűségi változók függetlensége.** X és Y függetlenek egymástól, ha minden $A \in \sigma(X)$ és minden $B \in \sigma(Y)$-ra $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Állítás. **Valószínűségi változók függetlenségének karakterizációi.**

- X, Y függetlenek $\Leftrightarrow$ $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$ (tetsz. X, Y esetén)
- X, Y függetlenek $\Leftrightarrow$ $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$ (ha X, Y absz. folyt.)
- X, Y függetlenek $\Leftrightarrow$ $P(X=x, Y=y) = P(X=x)\cdot P(Y=y)$ (ha X, Y diszkrét)
- X, Y függetlenek $\Rightarrow$ $E(XY) = EX\cdot EY$ (tetsz. véges várható értékű X,Y esetén)

Definíció. X **és** Y **kovarianciája:** $\mathrm{cov}(X,Y) = E[(X-EX)(Y-EY)]$.
Köv.: $\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - EXEY$.
Definíció. Ha $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy X és Y **korrelálatlanok**.

Állítás. **A kovariancia tulajdonságai.** Legyenek $X, Y, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ véges szórású valószínűségi változók, $a, b, a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $\mathrm{cov}(X,X) = D^2X$
- $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$
- $\mathrm{cov}(X,a) = 0$
- $\mathrm{cov}(aX,bY) = a\cdot b\cdot\mathrm{cov}(X,Y)$
- $\mathrm{cov}\left(\sum\limits_{i=1}^n a_iX_i, \sum\limits_{j=1}^m b_jY_j\right) = \sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^m a_i\cdot b_j\cdot\mathrm{cov}(X_i,Y_j)$
- $D^2(X+Y) = D^2X + D^2Y + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$
- $D^2(\sum\limits_{i=1}^n X_i) = \sum\limits_{i=1}^n D^2X_i + 2\sum\limits_{1\le i<j\le n}\mathrm{cov}(X_i,X_j)$

Állítás. **A függetlenség és a korrelálatlanság kapcsolata.**

- Ha X és Y függetlenek egymástól, akkor korrelálatlanok.
- Ha X és Y korrelálatlanok, akkor ebből **neem** következik, hogy függetlenek!!4!4!!

Definíció. X **és** Y **korrelációja:** $R(X,Y) = \begin{cases} \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{DXDY} & \text{ha } DX \neq 0 \text{ és } DY \neq 0 \\ 0 & \text{ha } DX = 0 \text{ vagy } DY = 0 \end{cases}$

A korreláció két valószínűségi változó lineáris kapcsolatát méri: ha

$R > 0$	$\Rightarrow$	pozitív a kapcsolat		$R^2 \sim 1$	$\Rightarrow$	erős a kapcsolat
			és	$R^2 \sim 0.5$	$\Rightarrow$	közepes a kapcsolat
$R < 0$	$\Rightarrow$	negatív a kapcsolat		$R^2 \sim 0$	$\Rightarrow$	gyenge a kapcsolat

Állítás. **A korreláció tulajdonságai.**
Legyenek X és Y véges szórású valószínűségi változók. Ekkor

- $|R(X,Y)| \le 1$
- $|R(X,Y)| = 1$ akkor és csak akkor, ha Y 1 valószínűséggel lineáris függvénye X-nek, azaz léteznek olyan a és b valós számok, hogy $P(Y = aX + b) = 1$.

Tétel. **Markov-egyenlőtlenség:** Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény, $X \ge 0$ val.változó, $\varepsilon > 0$ tetsz. Ekkor $\mathrm{P}(X \ge \varepsilon) \le \frac{E[g(X)]}{g(\varepsilon)}$.

Speciálisan, ha $g(x) = x$ $\Rightarrow$ $\mathrm{P}(X \ge \varepsilon) \le \frac{E(X)}{\varepsilon}$

Tétel. **Csebisev-egyenlőtlenség:** $\mathrm{P}(|X - EX| \ge \varepsilon) \le \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}$.

Következmény. $\mathrm{P}(|X - EX| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}$

Legyen $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók sorozata.
Definíció. **1 valószínűségű konvergencia:**

$X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ *1 valószínűséggel*, ha $P(\{\omega : X_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\to} X(\omega)\}) = 1$.

Definíció. **sztochasztikus konvergencia:**
$X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ *sztochasztikusan*, ha $\forall\varepsilon > 0$-ra $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - X| \ge \varepsilon) = 0$.

Tétel. **Nagy számok (erős) törvénye (NSZT):**
Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. val. változók, $EX_1 = m < \infty$.
Ekkor $\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \overset{n\to\infty}{\to} m$ 1 valószínűséggel.
Nagy számok gyenge törvényének hívjuk ezt a tételt, ha a konvergencia sztochasztikus.

Tétel. **Centrális határeloszlás tétel (CHT):**
Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. val. változók, $EX_1 = m$, $D^2(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Ekkor $\frac{X_1+\ldots+X_n-nm}{\sqrt{n}\sigma} \overset{n\to\infty}{\to} N(0,1)$ eloszlásban, azaz $P\left(\frac{X_1+\ldots+X_n-nm}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) \overset{n\to\infty}{\to} \Phi(x)$.
