Valószínűségszámítás 2
8. feladatsor
2018.04.10.

1. Kovácsék minden reggel elolvassák az újságot, majd a délelőtti rendrakás során Kovácsné a szoba sarkában lévő újságkupac tetejére teszi a kiolvasott példányt. Kovács úr, mikor hazajön a munkából, megnézi a kupacot. Ha már öt újság összegyűlt, akkor kidobja a kupacot a papírgyűjtőbe. Ha viszont ötnél kevesebb újság van a kupacban, akkor csak 1/3 valószínűséggel dobja ki az újságokat. Legyen X_n az n-edik nap estéjén a kupacban lévő újságok száma.
   a) Markov láncot alkot-e ez a folyamat? Ha igen, adjuk meg az állapotteret és az átmenetmátrixot.
   b) Határozzuk meg az osztályokat és a periódust!
   c) Vasárnap este üres volt a kupac. Mekkora eséllyel lesz csütörtök este pontosan egy újság a kupacban?
   d) Adjuk meg a stacionárius eloszlást!
2. (Bernoulli-Laplace urnamodell keverésre.) Két urnában elosztottunk N piros és N kék (számozott) golyót úgy, hogy mindkét urnában N golyó legyen. Ezután minden lépésben véletlenszerűen kiválasztunk mindkét urnából egy-egy golyót, és megcseréljük őket. Definiáljunk két Markov láncot: n csere után legyen X_n az első urnában lévő golyók halmaza, Y_n pedig az első urnában lévő piros golyók száma.
   a) Adjuk meg mindkét Markov lánc állapotterét és átmenetmátrixát!
   b) Adjuk meg mindkét Markov lánc stacionárius eloszlását!
3. Legyenek Y_i független, p paraméterű indikátorváltozók. Markov láncot alkot-e az $X_n = Y_n + Y_{n+1} + Y_{n+2}$ sorozat?
4. Legyen G véges, egyszerű, irányítatlan, összefüggő gráf. Legyen X_n az egyszerű bolyongás G-n. Adjuk meg a lánc stacionárius eloszlását!
5. Egy király bolyong a sakktáblán. Írjuk le Markov lánccal a folyamatot!
   a) Vizsgáljuk az állapotok osztályozását, periódusát!
   b) Keressünk stacionárius eloszlást!
   c) Várhatóan hány lépés alatt tér vissza a kiindulási helyére, ha az egyik sarokból indult?
6. Tekintsük a következő sorbanállási problémát: X_n a sorbanálló vásárlók száma az n-edik időpontban. Az n-edik és az $(n+1)$-edik időpont között p valószínűséggel érkezik új vásárló a sor végére (de legfeljebb egy), és q valószínűséggel távozik egy kiszolgált vásárló (szintén legfeljebb egy). Ez a két esemény független, és a különböző időintervallumokban történő események is függetlenek.
   a) Markov lánc-e a folyamat? Ha igen, adjuk meg az átmenetmátrixot, és osztályozzuk az állapotokat! Mennyi a lánc periódusa?
   b) A p, q értékek függvényében határozzuk meg, mikor lesz a lánc átmeneti, nulla visszatérő, illetve pozitív visszatérő!
   c) A $p = 1/3$, $q = 2/3$ esetben határozzuk meg a stacionárius eloszlást. Átlagosan milyen hosszú a sor stacionárius esetben?
   d) A $p = 2/3$, $q = 1/3$ esetben mennyi az esélye, hogy egy j hosszú sor valaha elfogy?
7. Kezdetben Pistike zsebében 5 cukorka van. Minden reggel benyúl a zsebébe. Ha van benne cukorka, megeszik egyet. Ha nincs, akkor vesz a boltban kettő, három vagy négy cukorkát (legyen ezek valószínűsége rendre 1/4, 1/4, 1/2). Egyet rögtön megeszik, a többit a zsebébe teszi. Jelölje X_n, hogy az n-edik este hány cukorka lapul a zsebében.
   a) Adjuk meg a Markov lánc átmenetmátrixát!
   b) Határozzuk meg a lánc stacionárius eloszlását!
   c) Körülbelül mennyi az esélye, hogy egy hónap múlva reggel Pistike zsebe üres lesz?

Valószínűségszámítás 2
8. feladatsor
2018.04.10.

1. Kovácsék minden reggel elolvassák az újságot, majd a délelőtti rendrakás során Kovácsné a szoba sarkában lévő újságkupac tetejére teszi a kiolvasott példányt. Kovács úr, mikor hazajön a munkából, megnézi a kupacot. Ha már öt újság összegyűlt, akkor kidobja a kupacot a papírgyűjtőbe. Ha viszont ötnél kevesebb újság van a kupacban, akkor csak 1/3 valószínűséggel dobja ki az újságokat. Legyen X_n az n-edik nap estéjén a kupacban lévő újságok száma.
   a) Markov láncot alkot-e ez a folyamat? Ha igen, adjuk meg az állapotteret és az átmenetmátrixot.
   b) Határozzuk meg az osztályokat és a periódust!
   c) Vasárnap este üres volt a kupac. Mekkora eséllyel lesz csütörtök este pontosan egy újság a kupacban?
   d) Adjuk meg a stacionárius eloszlást!
2. (Bernoulli-Laplace urnamodell keverésre.) Két urnában elosztottunk N piros és N kék (számozott) golyót úgy, hogy mindkét urnában N golyó legyen. Ezután minden lépésben véletlenszerűen kiválasztunk mindkét urnából egy-egy golyót, és megcseréljük őket. Definiáljunk két Markov láncot: n csere után legyen X_n az első urnában lévő golyók halmaza, Y_n pedig az első urnában lévő piros golyók száma.
   a) Adjuk meg mindkét Markov lánc állapotterét és átmenetmátrixát!
   b) Adjuk meg mindkét Markov lánc stacionárius eloszlását!
3. Legyenek Y_i független, p paraméterű indikátorváltozók. Markov láncot alkot-e az $X_n = Y_n + Y_{n+1} + Y_{n+2}$ sorozat?
4. Legyen G véges, egyszerű, irányítatlan, összefüggő gráf. Legyen X_n az egyszerű bolyongás G-n. Adjuk meg a lánc stacionárius eloszlását!
5. Egy király bolyong a sakktáblán. Írjuk le Markov lánccal a folyamatot!
   a) Vizsgáljuk az állapotok osztályozását, periódusát!
   b) Keressünk stacionárius eloszlást!
   c) Várhatóan hány lépés alatt tér vissza a kiindulási helyére, ha az egyik sarokból indult?
6. Tekintsük a következő sorbanállási problémát: X_n a sorbanálló vásárlók száma az n-edik időpontban. Az n-edik és az $(n+1)$-edik időpont között p valószínűséggel érkezik új vásárló a sor végére (de legfeljebb egy), és q valószínűséggel távozik egy kiszolgált vásárló (szintén legfeljebb egy). Ez a két esemény független, és a különböző időintervallumokban történő események is függetlenek.
   a) Markov lánc-e a folyamat? Ha igen, adjuk meg az átmenetmátrixot, és osztályozzuk az állapotokat! Mennyi a lánc periódusa?
   b) A p, q értékek függvényében határozzuk meg, mikor lesz a lánc átmeneti, nulla visszatérő, illetve pozitív visszatérő!
   c) A $p = 1/3$, $q = 2/3$ esetben határozzuk meg a stacionárius eloszlást. Átlagosan milyen hosszú a sor stacionárius esetben?
   d) A $p = 2/3$, $q = 1/3$ esetben mennyi az esélye, hogy egy j hosszú sor valaha elfogy?
7. Kezdetben Pistike zsebében 5 cukorka van. Minden reggel benyúl a zsebébe. Ha van benne cukorka, megeszik egyet. Ha nincs, akkor vesz a boltban kettő, három vagy négy cukorkát (legyen ezek valószínűsége rendre 1/4, 1/4, 1/2). Egyet rögtön megeszik, a többit a zsebébe teszi. Jelölje X_n, hogy az n-edik este hány cukorka lapul a zsebében.
   a) Adjuk meg a Markov lánc átmenetmátrixát!
   b) Határozzuk meg a lánc stacionárius eloszlását!
   c) Körülbelül mennyi az esélye, hogy egy hónap múlva reggel Pistike zsebe üres lesz?