Sztochasztikus analízis
9. gyakorlat
2017. 11. 16.

Feladatok

1. A Clark-Ocone formula segítségével számítsuk ki a következő változó integrálreprezentációját:

$$F = (W(T) + T)\exp\left(-W(T) - \frac{1}{2}T\right).$$

2. (8/4) Legyen $F = \exp\left(W(h) - \frac{1}{2}\|h\|^2\right)$, $h \in L^2([0,T])$, továbbá $L = \delta D$. Mutassuk meg, hogy $F \in \operatorname{dom} L$ és $LF = (W(h) - \|h\|^2)F$.

3. (8/5) Legyen W_t egy Wiener-folyamat, valamint τ egy nem konstans, véges értékkészlettel rendelkező megállási idő. Mutassuk meg, hogy a W_τ valószínűségi változó nem Malliavin deriválható.

4. (8/6) Legyen $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ olyan, hogy $1/|F| \in L^2(\Omega)$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\mathbb{P}(F > 0)$ vagy 0, vagy 1.

   Útmutatás. Először ellenőrizzük, hogy $\mathbb{E}(\operatorname{sign}(F)\delta u) = 0$, ha u korlátos és Szkorohod-integrálható.

5. A standard normális sűrűségfüggvényt felhasználva ellenőrizzük le a sűrűségfüggvényre adott formula helyességét egy standard normális eloszlású valószínűségi változóra.

6. Legyen W_t Wiener folyamat. Legyen $\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t f(s)ds$. A feladat célja az előadáson elhangzott $Q_W \approx Q_{\tilde{W}} \Rightarrow f \in \mathbb{L}^2$ implikáció bizonyítása.

   a) Legyen $t_1 = 0, t_2 = \frac{1}{n}, \ldots, t_{n-1} = \frac{n-1}{n}, t_n = 1$. Legyen továbbá $X = (W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n})$ és $\tilde{X} = (\tilde{W}_{t_1}, \tilde{W}_{t_2}, \ldots, \tilde{W}_{t_n})$. Írjuk fel a vektorváltozók sűrűségfüggvényeit.

   b) Számoljuk ki a hányadosukat.

   c) Bontsuk fel a kovarianciamátrix inverzét $L^\intercal L$ alakban.

   d) Igazoljuk, hogy

$$f \in \mathbb{L}^2 \Leftrightarrow \lim_n \sum_i \frac{\left(\mathbb{E}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s)ds\right)^2}{t_{i+1} - t_i} < \infty.$$

   e) A sűrűségfüggvények hányadosából (a mértékek ekvivalenciájának segítségével) következtessünk a kitevőben lévő mennyiségek korlátosságára.

   f) Végül vonjuk le az $f \in \mathbb{L}^2$ következtetést.

Személyes adatok:

Név: Bondici László

E-mail: bondici@caesar.elte.hu

Honlap: http://bondici.web.elte.hu/

Házi feladat

1. Legyen $L = -\delta D$. Mutassuk meg, hogy

   a) $\mathcal{H}_p \subset \operatorname{dom} L$ és $LF = -pF$, ha $F \in \mathcal{H}_p$.

   b) Ha $G \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$, $\mathbb{E}G = 0$, akkor $G \in \operatorname{im} L$ és $L^{-1}G \in \mathbb{D}^{1,2}$.

   c) Ha $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, $G \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$ és $\mathbb{E}G = 0$, akkor

$$cov(F, G) = \mathbb{E}\left(\left\langle DF, DL^{-1}G\right\rangle_{\mathbb{L}^2([0,T])}\right).$$

Sztochasztikus analízis
8. gyakorlat
2017. 11. 09.

Feladatok

1. A Clark-Ocone formula segítségével számítsuk ki a következő változók integrálreprezentációját:

   a) $F = W_T^3$;

   b) $F = \mathrm{e}^{2W_1}$.

2. Számítsuk ki az előző feladatban szereplő valószínűségi változók integrálreprezentációját az Itô-formula célravezető alkalmazásával is.

3. Döntsük el, hogy u Szkorohod integrálható-e, és határozzuk meg δu-t, ha

   a) $u_t = W_t$;

   b) $u_t = \mathrm{e}^{W_T}$.

4. Legyen $F = \exp\left(W(h) - \frac{1}{2}\|h\|^2\right)$, $h \in L^2([0,T])$, továbbá $L = \delta D$. Mutassuk meg, hogy $F \in \operatorname{dom} L$ és $LF = (W(h) - \|h\|^2)F$.

5. Legyen W_t egy Wiener-folyamat, valamint τ egy nem konstans, véges értékkészlettel rendelkező megállási idő. Mutassuk meg, hogy a W_τ valószínűségi változó nem Malliavin deriválható.

6. Legyen $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ olyan, hogy $1/|F| \in L^2(\Omega)$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\mathbb{P}(F > 0)$ vagy 0, vagy 1.

   Útmutatás. Először ellenőrizzük, hogy $\mathbb{E}(\operatorname{sign}(F)\delta u) = 0$, ha u korlátos és Szkorohod-integrálható.

Házi feladat

1. A Clark-Ocone formula segítségével számítsuk ki a következő változók integrálreprezentációját:

   a) $F = W_T^4$;

   b) $F = \mathrm{e}^{4W_1}$.

2. Számítsuk ki az előző feladatban szereplő valószínűségi változók integrálreprezentációját az Itô-formula célravezető alkalmazásával is.

Személyes adatok:

Név: Bondici László

E-mail: bondici@caesar.elte.hu

Honlap: http://bondici.web.elte.hu/