Sztochasztikus analízis
6. gyakorlat
2017. 10. 19.

Információk

Következő órán (2017.10.26) ZH. Egy lapnyi saját kézzel írott puska használható.

Feladatok

1. (5/1.) Legyen $F = \mathbb{1}_{W_1>0}$. Igazoljuk, hogy F nem tartozik $\mathbb{D}^{1,2}$-höz.

2. Legyen $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{1}_{\{F=0\}}DF = 0$. Ennek segítségével igazoljuk, hogy $F, G \in \mathbb{D}^{1,2}$ esetén $\mathbb{1}_{\{F=G\}}DF = \mathbb{1}_{\{F=G\}}DG$, vagyis a derivált lokálisan számolható.

   Útmutatás: Legyen $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $[-\delta, \delta]$ intervallum indikátorának integrálfüggvénye, ahol δ olyan pozitív valós szám, amelyre $P(|F| = \delta) = 0$. Számítsuk ki $D\phi(F)$-et a láncszabály alapján, és δ-val tartsunk nullához.

3. Igaz-e, hogy $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, és ha igen, akkor mi a Malliavin deriváltja, amikor F az alábbi alakú:

   a) $F = \int_0^T \int_0^{t_2} \cos(t_1 + t_2) dW_{t_1} dW_{t_2}$;

   b) $F = 3W(s_0)W^2(t_0) + \log(1 + W^2(s_0))$, ahol $s_0, t_0 \in [0, T]$ rögzített.

4. (HF3/1.) Legyen $Y \sim N(0, \sigma^2)$ normális eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki $E(H_n(Y))$-t, ahol $H_n = (\partial^*)^n \mathbb{1}$ az n. Hermite-polinom.

5. (HF2/1.) Legyen g folytonosan differenciálható függvény, Z pedig standard normális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy
$$D^2(g(Z)) \leq E(g'(Z)^2),$$
   ha a bal oldal véges. Mikor teljesül egyenlőség?

6. (5/7.) Legyen $G = I_2(\mathbb{1}_{[0,1]} \otimes \mathbb{1}_{[0,1]})$, $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $\phi(t) = t$. Számítsuk ki $\delta(G \otimes \phi)$ értékét.

Személyes adatok:

Név: Bondici László

E-mail: bondici@caesar.elte.hu

Honlap: http://bondici.web.elte.hu/

Sztochasztikus analízis
6. gyakorlat
2017. 10. 19.

Információk

Következő órán (2017.10.26) ZH. Egy lapnyi saját kézzel írott puska használható.

Feladatok

1. (5/1.) Legyen $F = \mathbb{1}_{W_1>0}$. Igazoljuk, hogy F nem tartozik $\mathbb{D}^{1,2}$-höz.

2. Legyen $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{1}_{\{F=0\}} DF = 0$. Ennek segítségével igazoljuk, hogy $F, G \in \mathbb{D}^{1,2}$ esetén $\mathbb{1}_{\{F=G\}} DF = \mathbb{1}_{\{F=G\}} DG$, vagyis a derivált lokálisan számolható.

   Útmutatás: Legyen $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $[-\delta, \delta]$ intervallum indikátorának integrálfüggvénye, ahol δ olyan pozitív valós szám, amelyre $P(|F| = \delta) = 0$. Számítsuk ki $D\phi(F)$-et a láncszabály alapján, és δ-val tartsunk nullához.

3. Igaz-e, hogy $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, és ha igen, akkor mi a Malliavin deriváltja, amikor F az alábbi alakú:

   a) $F = \int_0^T \int_0^{t_2} \cos(t_1 + t_2) dW_{t_1} dW_{t_2}$;

   b) $F = 3W(s_0)W^2(t_0) + \log(1 + W^2(s_0))$, ahol $s_0, t_0 \in [0, T]$ rögzített.

4. (HF3/1.) Legyen $Y \sim N(0, \sigma^2)$ normális eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki $E(H_n(Y))$-t, ahol $H_n = (\partial^*)^n \mathbb{1}$ az n. Hermite-polinom.

5. (HF2/1.) Legyen g folytonosan differenciálható függvény, Z pedig standard normális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy
$$D^2(g(Z)) \leq E(g'(Z)^2),$$
   ha a bal oldal véges. Mikor teljesül egyenlőség?

6. (5/7.) Legyen $G = I_2(\mathbb{1}_{[0,1]} \otimes \mathbb{1}_{[0,1]})$, $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $\phi(t) = t$. Számítsuk ki $\delta(G \otimes \phi)$ értékét.

Személyes adatok:

Név: Bondici László

E-mail: bondici@caesar.elte.hu

Honlap: http://bondici.web.elte.hu/