Sztochasztikus analízis
4. gyakorlat
2017. 10. 05.

Feladatok

1. (3/1.) Legyenek X, Y standard normális eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy amennyiben együttesen normálisak, akkor

$$\mathbb{E}(H_n(X)H_m(Y)) = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \neq m \\ n!(\operatorname{cov}(X,Y))^n & \text{ha } n = m. \end{cases}$$

   A következő példa segítségével igazoljuk, hogy az együttes normalitás nem hagyható el: legyen $Y = ZX$ ahol $X \sim N(0,1)$ és Z független X-től, $\mathbb{P}(Z = \pm 1) = \frac{1}{2}$ eloszlással. Számítsuk ki $\mathbb{E}H_2(X)H_2(Y)$-t.

   Útmutatás. Írjuk fel az Y-t a következő alakban: $Y = \rho X + \sqrt{1-\rho^2}Y'$, ahol X, Y' független standard normálisok és $\rho = \operatorname{cov}(X,Y)$. Ezek után kondicionáljunk $\sqrt{1-\rho^2}Y'$-re és használjuk, hogy $H_n = (\partial^*)^n 1$, $\partial H_n = nH_{n-1}$.

2. Legyen $F = sh(W(1))$. Számoljuk ki az F Wiener-Itô káosz felbontását.

3. Legyen $F = \mathbb{1}_{W_1>0}$. Számoljuk ki az F Wiener-Itô káosz felbontását.

4. Számoljuk ki az $F = \int_0^T g(s)W_s ds$ Wiener-Itô káosz felbontását, ahol $g \in L^2([0,T])$.

5. Legyen $f(x,y) = \mathbb{1}_{[0,1)}(x)\mathbb{1}_{[3,4)}(y)$, $g(x,y) = \mathbb{1}_{[0,2)}(x)\mathbb{1}_{[3,5)}(y)$. Számoljuk ki az $I_2(f)I_2(g)$ várható értékét.

6. (HF2) Legyen g folytonosan differenciálható függvény, Z pedig standard normális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy

$$D^2(g(Z)) \leq E(g'(Z)^2),$$

   ha a bal oldal véges. Mikor teljesül egyenlőség?

Házi feladat

1. Számoljuk ki a következő változók Wiener-Itô káosz felbontását:

   a) $F = W_t$, ahol $t \in [0,T]$ rögzített;
   b) $F = \int_0^T g(s)dW_s$, ahol $g \in L^2([0,T])$;
   c) $F = W_t^2$, ahol $t \in [0,T]$ rögzített;
   d) $F = \exp\left(\int_0^T g(s)dW_s\right)$, ahol $g \in L^2([0,T])$.

Személyes adatok:

Név: Bondici László

E-mail: bondici@caesar.elte.hu

Honlap: http://bondici.web.elte.hu/

Sztochasztikus analízis
4. gyakorlat
2017. 10. 05.

Feladatok

1. (3/1.) Legyenek X, Y standard normális eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy amennyiben együttesen normálisak, akkor

$$\mathbb{E}(H_n(X)H_m(Y)) = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \neq m \\ n!(\operatorname{cov}(X,Y))^n & \text{ha } n = m. \end{cases}$$

   A következő példa segítségével igazoljuk, hogy az együttes normalitás nem hagyható el: legyen $Y = ZX$ ahol $X \sim N(0,1)$ és Z független X-től, $\mathbb{P}(Z = \pm 1) = \frac{1}{2}$ eloszlással. Számítsuk ki $\mathbb{E}H_2(X)H_2(Y)$-t.

   Útmutatás. Írjuk fel az Y-t a következő alakban: $Y = \rho X + \sqrt{1-\rho^2}Y'$, ahol X, Y' független standard normálisok és $\rho = \operatorname{cov}(X,Y)$. Ezek után kondicionáljunk $\sqrt{1-\rho^2}Y'$-re és használjuk, hogy $H_n = (\partial^*)^n 1$, $\partial H_n = nH_{n-1}$.

2. Legyen $F = sh(W(1))$. Számoljuk ki az F Wiener-Itô káosz felbontását.

3. Legyen $F = \mathbb{1}_{W_1>0}$. Számoljuk ki az F Wiener-Itô káosz felbontását.

4. Számoljuk ki az $F = \int_0^T g(s)W_s ds$ Wiener-Itô káosz felbontását, ahol $g \in L^2([0,T])$.

5. Legyen $f(x,y) = \mathbb{1}_{[0,1)}(x)\mathbb{1}_{[3,4)}(y)$, $g(x,y) = \mathbb{1}_{[0,2)}(x)\mathbb{1}_{[3,5)}(y)$. Számoljuk ki az $I_2(f)I_2(g)$ várható értékét.

6. (HF2) Legyen g folytonosan differenciálható függvény, Z pedig standard normális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy

$$D^2(g(Z)) \leq E(g'(Z)^2),$$

   ha a bal oldal véges. Mikor teljesül egyenlőség?

Házi feladat

1. Számoljuk ki a következő változók Wiener-Itô káosz felbontását:

   a) $F = W_t$, ahol $t \in [0,T]$ rögzített;

   b) $F = \int_0^T g(s)dW_s$, ahol $g \in L^2([0,T])$;

   c) $F = W_t^2$, ahol $t \in [0,T]$ rögzített;

   d) $F = \exp\left(\int_0^T g(s)dW_s\right)$, ahol $g \in L^2([0,T])$.

Személyes adatok:

Név: Bondici László

E-mail: bondici@caesar.elte.hu

Honlap: http://bondici.web.elte.hu/