Sztochasztikus analízis
3. gyakorlat
2017. 09. 28.

Feladatok

1. Legyenek X, Y standard normális eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy amennyiben együttesen normálisak, akkor

$$\mathbb{E}(H_n(X)H_m(Y)) = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \neq m \\ n!(\operatorname{cov}(X,Y))^n & \text{ha } n = m. \end{cases}$$

   A következő példa segítségével igazoljuk, hogy az együttes normalitás nem hagyható el: legyen $Y = ZX$ ahol $X \sim N(0,1)$ és Z független X-től, $\mathbb{P}(Z = \pm 1) = \frac{1}{2}$ eloszlással. Számítsuk ki $\mathbb{E}H_2(X)H_2(Y)$-t.

   Útmutatás. Írjuk fel az Y-t a következő alakban: $Y = \rho X + \sqrt{1-\rho^2}Y'$, ahol X, Y' független standard normálisok és $\rho = \operatorname{cov}(X,Y)$. Ezek után kondicionáljunk $\sqrt{1-\rho^2}Y'$-re és használjuk, hogy $H_n = (\partial^*)^n 1$, $\partial H_n = nH_{n-1}$.

2. Igaz-e, hogy $F \in \mathbb{D}^{1,2}$? Ha igen, mi a Malliavin deriváltja, amikor

   a) $F = W_T \int_0^T g(s)ds$, ahol W_t Wiener-folyamat, $g \in L^2([0,T])$?

   b) $F = W_T \int_0^T g(s)dW_s$, ahol W_t Wiener-folyamat, $g \in L^2([0,T])$?

   c) $F = \arctan(W_T)\mathrm{e}^{\int_0^T s dW_s} \int_0^T s^3 dW_s$, ahol W_t Wiener-folyamat?

3. Igaz-e, hogy $F \in \mathbb{D}^{1,2}$? Ha igen, mi a Malliavin deriváltja, amikor

   a) $F = \cos(W_T)$?

   b) $F = W_1 \mathrm{e}^{W_2}$?

   c) $F = \mathrm{e}^{W_T^4}$?

4. Legyen $F = \mathrm{e}^{W_1}$. Számítsuk ki: $E(\int_0^1 D_s F ds)$.

Házi feladat

1. Legyen $Y \sim N(0,\sigma^2)$ normális eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki $E(H_n(Y))$-t, ahol $H_n = (\partial^*)^n \mathbb{1}$ az n. Hermite-polinom.

Személyes adatok:

Név: Bondici László

E-mail: bondici@caesar.elte.hu

Honlap: http://bondici.web.elte.hu/

Sztochasztikus analízis
3. gyakorlat
2017. 09. 28.

Feladatok

1. Legyenek X, Y standard normális eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy amennyiben együttesen normálisak, akkor

$$\mathbb{E}(H_n(X)H_m(Y)) = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \neq m \\ n!(\operatorname{cov}(X,Y))^n & \text{ha } n = m. \end{cases}$$

   A következő példa segítségével igazoljuk, hogy az együttes normalitás nem hagyható el: legyen $Y = ZX$ ahol $X \sim N(0,1)$ és Z független X-től, $\mathbb{P}(Z = \pm 1) = \frac{1}{2}$ eloszlással. Számítsuk ki $\mathbb{E}H_2(X)H_2(Y)$-t.

   Útmutatás. Írjuk fel az Y-t a következő alakban: $Y = \rho X + \sqrt{1-\rho^2}Y'$, ahol X, Y' független standard normálisok és $\rho = \operatorname{cov}(X,Y)$. Ezek után kondicionáljunk $\sqrt{1-\rho^2}Y'$-re és használjuk, hogy $H_n = (\partial^*)^n 1$, $\partial H_n = nH_{n-1}$.

2. Igaz-e, hogy $F \in \mathbb{D}^{1,2}$? Ha igen, mi a Malliavin deriváltja, amikor

   a) $F = W_T \int_0^T g(s)ds$, ahol W_t Wiener-folyamat, $g \in L^2([0,T])$?

   b) $F = W_T \int_0^T g(s)dW_s$, ahol W_t Wiener-folyamat, $g \in L^2([0,T])$?

   c) $F = \arctan(W_T)\mathrm{e}^{\int_0^T s dW_s} \int_0^T s^3 dW_s$, ahol W_t Wiener-folyamat?

3. Igaz-e, hogy $F \in \mathbb{D}^{1,2}$? Ha igen, mi a Malliavin deriváltja, amikor

   a) $F = \cos(W_T)$?

   b) $F = W_1 \mathrm{e}^{W_2}$?

   c) $F = \mathrm{e}^{W_T^4}$?

4. Legyen $F = \mathrm{e}^{W_1}$. Számítsuk ki: $E(\int_0^1 D_s F ds)$.

Házi feladat

1. Legyen $Y \sim N(0,\sigma^2)$ normális eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki $E(H_n(Y))$-t, ahol $H_n = (\partial^*)^n \mathbb{1}$ az n. Hermite-polinom.

Személyes adatok:

Név: Bondici László

E-mail: bondici@caesar.elte.hu

Honlap: http://bondici.web.elte.hu/