Sztochasztikus analízis
2. gyakorlat
2017. 09. 21.

Feladatok

1. Legyen H_n az n-edik Hermite-polinom, azaz $H_n = (\partial^*)^n \mathbb{1}$. Legyen továbbá
$$h_n(\lambda, x) = H_n\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)\left(\sqrt{\lambda}\right)^n.$$
Igazoljuk a következőket:
   a) h_n kétváltozós polinomja λ-nak és x-nek;
   b)
$$\exp(tx - t^2\lambda/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} h_n(\lambda, x);$$
   c) $h_n(t, W_t)$ martingál, ahol W_t Wiener-folyamat.

2. Legyen Z standard normális eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki a $\cos(Z)$ és $\sin(Z)$ valószínűségi változók Wiener-Itô káosz felbontását.

3. Számítsuk ki a derivált folyamatot a következő sima valószínűségi változók esetén:
   (a) $F = W(A)$;
   (b) $F = W(A)W(B)$;
   (c) $F = W_T^2$;
   (d) $F = W_T^3 W_t, t \leq T$.

4. Legyen W_t Wiener-folyamat. Mutassuk meg, hogy 1 valószínűséggel nincs olyan intervallum, ahol a trajektóriák növekednek.

5. Legyen $(\mathcal{A}, \Omega, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, és legyen adott ezen egy W_t Wiener-folyamat. Tekintsük a következő sztochasztikus differenciálegyenlettel megadott részvényárfolyam-dinamikát:
$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t),$$
ahol S_0 adott, μ és σ valós konstansok, $\sigma > 0$.

   Legyen továbbá a bankbetét dinamikája konstans $r > 0$ mellett a következő:
$$dB_t = rB_t dt,\ B_0 = 1.$$
   a) Oldjuk meg a differenciálegyenleteket, vagyis fejezzük ki expliciten S_t és B_t értékeit.
   b) Számoljuk ki az $\frac{S_t}{B_t}$ folyamat dinamikáját.
   c) Írjuk fel annak a $\mathbb{Q}$ mértéknek a $\mathbb{P}$-re vonatkozó Radon-Nikodym deriváltját, mely alatt az $\frac{S_t}{B_t}$ diszkontált érték-folyamat martingál.

Személyes adatok:

Név: Bondici László

E-mail: bondici@caesar.elte.hu

Házi feladat

1. Legyen g folytonosan differenciálható függvény, Z pedig standard normális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy

$$D^2(g(Z)) \leq E(g'(Z)^2),$$

ha a bal oldal véges. Mikor teljesül egyenlőség?