Sztochasztikus analízis
11. gyakorlat
2017. 11. 30.

Feladatok

1. (10/4) (Blumenthal 0-1 törvény) Legyen W_t Wiener-folyamat, és az $\mathcal{F}_t^0 = \sigma\{W_u, u \leq t\}$ a természetes filtráció. Legyen továbbá $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s^0$ a természetes filtráció jobbról folytonos burka. Ekkor $\mathcal{F}_0$ triviális, vagyis $A \in \mathcal{F}_0$ esetén $\mathbb{P}(A) = 0$ vagy $\mathbb{P}(A) = 1$.

2. (10/5) Legyen Z egy valószínűségi változó, melyre $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = -1) = \frac{1}{2}$. Ennek segítségével tekintsük az $X_t = tZ$ folyamatot. Határozzuk meg az $\mathcal{F}_0^0$ és $\mathcal{F}_0$ σ-algebrákat.

3. (10/6) Legyen W_t egy Wiener-folyamat. A Blumenthal 0-1 törvény segítségével igazoljuk, hogy
$$\mathbb{P}\left(\forall\varepsilon > 0\ \exists\, 0 < t < \varepsilon : W_t > 0\right) = 1.$$

4. Tudjuk, hogy a háromdimenziós négyzetes Bessel folyamat kielégíti a következő sztochasztikus differenciálegyenletet:
$$dX_t = \frac{1}{X_t}dt + dW_t, X_0 = x_0,$$
ahol W_t Wiener-folyamat.

   a) Számítsuk ki a reciprok folyamat dinamikáját.

   b) Igazoljuk, hogy a reciprok folyamat valódi lokális martingál.

5. (Bayes tétel) Legyen $P \sim \tilde{P}$ két ekvivalens valószínűségi mérték. Legyen továbbá a Radon-Nikodym deriváltjuk $\frac{d\tilde{P}}{dP} = Z$. Bizonyítsuk be a következő összefüggést:
$$E_{\tilde{P}}(X|\mathcal{F}) = \frac{E_P(XZ|\mathcal{F})}{E_P(Z|\mathcal{F})}.$$

6. Legyen $(W_t)_{t\geq 0}$ Wiener-folyamat az $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtrációban és ξ $\mathcal{F}_0$-mérhető valószínűségi változó. Oldjuk meg a
$$dX_t = X_t(1 + X_t^2)dt + (1 + X_t^2)dW_t, \qquad X_0 = \xi$$
sztochasztikus differenciálegyenletet. Útmutatás: írjuk fel $arctg(X_t)$ fejlődését.

Személyes adatok:

Név: Bondici László

E-mail: bondici@caesar.elte.hu

Honlap: http://bondici.web.elte.hu/

Sztochasztikus analízis
11. gyakorlat
2017. 11. 30.

Feladatok

1. (10/4) (Blumenthal 0-1 törvény) Legyen W_t Wiener-folyamat, és az $\mathcal{F}_t^0 = \sigma\{W_u, u \leq t\}$ a természetes filtráció. Legyen továbbá $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s^0$ a természetes filtráció jobbról folytonos burka. Ekkor $\mathcal{F}_0$ triviális, vagyis $A \in \mathcal{F}_0$ esetén $\mathbb{P}(A) = 0$ vagy $\mathbb{P}(A) = 1$.

2. (10/5) Legyen Z egy valószínűségi változó, melyre $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = -1) = \frac{1}{2}$. Ennek segítségével tekintsük az $X_t = tZ$ folyamatot. Határozzuk meg az $\mathcal{F}_0^0$ és $\mathcal{F}_0$ σ-algebrákat.

3. (10/6) Legyen W_t egy Wiener-folyamat. A Blumenthal 0-1 törvény segítségével igazoljuk, hogy
$$\mathbb{P}\left(\forall \varepsilon > 0 \; \exists\, 0 < t < \varepsilon : W_t > 0\right) = 1.$$

4. Tudjuk, hogy a háromdimenziós négyzetes Bessel folyamat kielégíti a következő sztochasztikus differenciálegyenletet:
$$dX_t = \frac{1}{X_t}dt + dW_t, X_0 = x_0,$$
ahol W_t Wiener-folyamat.

   a) Számítsuk ki a reciprok folyamat dinamikáját.

   b) Igazoljuk, hogy a reciprok folyamat valódi lokális martingál.

5. (Bayes tétel) Legyen $P \sim \tilde{P}$ két ekvivalens valószínűségi mérték. Legyen továbbá a Radon-Nikodym deriváltjuk $\frac{d\tilde{P}}{dP} = Z$. Bizonyítsuk be a következő összefüggést:
$$E_{\tilde{P}}(X|\mathcal{F}) = \frac{E_P(XZ|\mathcal{F})}{E_P(Z|\mathcal{F})}.$$

6. Legyen $(W_t)_{t\geq 0}$ Wiener-folyamat az $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtrációban és ξ $\mathcal{F}_0$-mérhető valószínűségi változó. Oldjuk meg a
$$dX_t = X_t(1 + X_t^2)dt + (1 + X_t^2)dW_t, \qquad X_0 = \xi$$
sztochasztikus differenciálegyenletet. Útmutatás: írjuk fel $arctg(X_t)$ fejlődését.

Személyes adatok:

Név: Bondici László

E-mail: bondici@caesar.elte.hu

Honlap: http://bondici.web.elte.hu/