Sztochasztikus analízis
10. gyakorlat
2017. 11. 23.

Feladatok

1. (9/4) Legyen $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ olyan, hogy $1/|F| \in L^2(\Omega)$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\mathbb{P}(F > 0)$ vagy 0, vagy 1.

   Útmutatás. Először ellenőrizzük, hogy $\mathbb{E}(\mathrm{sign}(F)\delta u) = 0$, ha u korlátos és Szkorohod-integrálható.

2. (9/5) A standard normális sűrűségfüggvényt felhasználva ellenőrizzük le a sűrűségfüggvényre adott formula helyességét egy standard normális eloszlású valószínűségi változóra.

3. (9/6) Legyen W_t Wiener folyamat. Legyen $\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t f(s)ds$. A feladat célja az előadáson elhangzott $Q_W \approx Q_{\tilde{W}} \Rightarrow f \in \mathbb{L}^2$ implikáció bizonyítása.

   a) Legyen $t_1 = 0, t_2 = \frac{1}{n}, \dots, t_{n-1} = \frac{n-1}{n}, t_n = 1$. Legyen továbbá $X = (W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_n})$ és $\tilde{X} = (\tilde{W}_{t_1}, \tilde{W}_{t_2}, \dots, \tilde{W}_{t_n})$. Írjuk fel a vektorváltozók sűrűségfüggvényeit.

   b) Számoljuk ki a hányadosukat.

   c) Bontsuk fel a kovarianciamátrix inverzét $L^\intercal L$ alakban.

   d) Igazoljuk, hogy
   $$f \in \mathbb{L}^2 \Leftrightarrow \lim_n \sum_i \frac{\left(\mathbb{E} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s)ds\right)^2}{t_{i+1} - t_i} < \infty.$$

   e) A sűrűségfüggvények hányadosából (a mértékek ekvivalenciájának segítségével) következtessünk a kitevőben lévő mennyiségek korlátosságára.

   f) Végül vonjuk le az $f \in \mathbb{L}^2$ következtetést.

4. (Blumenthal 0-1 törvény) Legyen W_t Wiener-folyamat, és az $\mathcal{F}_t^0 = \sigma\{W_u, u \leq t\}$ a természetes filtráció. Legyen továbbá $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t} \mathcal{F}_s^0$ a természetes filtráció jobbról folytonos burka. Ekkor $\mathcal{F}_0$ triviális, vagyis $A \in \mathcal{F}_0$ esetén $\mathbb{P}(A) = 0$ vagy $\mathbb{P}(A) = 1$.

5. Legyen Z egy valószínűségi változó, melyre $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = -1) = \frac{1}{2}$. Ennek segítségével tekintsük az $X_t = tZ$ folyamatot. Határozzuk meg az $\mathcal{F}_0^0$ és $\mathcal{F}_0$ σ-algebrákat.

6. Legyen W_t egy Wiener-folyamat. A Blumenthal 0-1 törvény segítségével igazoljuk, hogy
   $$\mathbb{P}\left(\forall \varepsilon > 0 \; \exists 0 < t < \varepsilon : W_t > 0\right) = 1.$$

Személyes adatok:

Név: Bondici László

E-mail: bondici@caesar.elte.hu

Honlap: http://bondici.web.elte.hu/

Sztochasztikus analízis
10. gyakorlat
2017. 11. 23.

Feladatok

1. (9/4) Legyen $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ olyan, hogy $1/|F| \in L^2(\Omega)$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\mathbb{P}(F > 0)$ vagy 0, vagy 1.

   Útmutatás. Először ellenőrizzük, hogy $\mathbb{E}(\mathrm{sign}(F)\delta u) = 0$, ha u korlátos és Szkorohod-integrálható.

2. (9/5) A standard normális sűrűségfüggvényt felhasználva ellenőrizzük le a sűrűségfüggvényre adott formula helyességét egy standard normális eloszlású valószínűségi változóra.

3. (9/6) Legyen W_t Wiener folyamat. Legyen $\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t f(s)ds$. A feladat célja az előadáson elhangzott $Q_W \approx Q_{\tilde{W}} \Rightarrow f \in \mathbb{L}^2$ implikáció bizonyítása.

   a) Legyen $t_1 = 0, t_2 = \frac{1}{n}, \ldots, t_{n-1} = \frac{n-1}{n}, t_n = 1$. Legyen továbbá $X = (W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n})$ és $\tilde{X} = (\tilde{W}_{t_1}, \tilde{W}_{t_2}, \ldots, \tilde{W}_{t_n})$. Írjuk fel a vektorváltozók sűrűségfüggvényeit.

   b) Számoljuk ki a hányadosukat.

   c) Bontsuk fel a kovarianciamátrix inverzét $L^\intercal L$ alakban.

   d) Igazoljuk, hogy
   $$f \in \mathbb{L}^2 \Leftrightarrow \lim_n \sum_i \frac{\left(\mathbb{E}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s)ds\right)^2}{t_{i+1} - t_i} < \infty.$$

   e) A sűrűségfüggvények hányadosából (a mértékek ekvivalenciájának segítségével) következtessünk a kitevőben lévő mennyiségek korlátosságára.

   f) Végül vonjuk le az $f \in \mathbb{L}^2$ következtetést.

4. (Blumenthal 0-1 törvény) Legyen W_t Wiener-folyamat, és az $\mathcal{F}_t^0 = \sigma\{W_u, u \le t\}$ a természetes filtráció. Legyen továbbá $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s^0$ a természetes filtráció jobbról folytonos burka. Ekkor $\mathcal{F}_0$ triviális, vagyis $A \in \mathcal{F}_0$ esetén $\mathbb{P}(A) = 0$ vagy $\mathbb{P}(A) = 1$.

5. Legyen Z egy valószínűségi változó, melyre $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = -1) = \frac{1}{2}$. Ennek segítségével tekintsük az $X_t = tZ$ folyamatot. Határozzuk meg az $\mathcal{F}_0^0$ és $\mathcal{F}_0$ σ-algebrákat.

6. Legyen W_t egy Wiener-folyamat. A Blumenthal 0-1 törvény segítségével igazoljuk, hogy
   $$\mathbb{P}\left(\forall\varepsilon > 0\ \exists\, 0 < t < \varepsilon : W_t > 0\right) = 1.$$

Személyes adatok:

Név: Bondici László

E-mail: bondici@caesar.elte.hu

Honlap: http://bondici.web.elte.hu/