Sztochasztikus analízis

1. gyakorlat

2017. 09. 14.

Információk

A gyakorlatok látogatása kötelező, maximum 4 hiányzás megengedett, ellenkező esetben a gyakorlati jegyet meg kell tagadnom (HKR 66. §).

Jegyszerzési tudnivalók:

- Két ZH lesz. Időpontok: október 26. és december 14. (a gyakorlat idősávjában).
- Mindkét ZH-n legalább 30 százalékot kell teljesíteni, ekkor tekinthető érvényesnek (ezt később pontosítom).
- Minden helyesen megoldott házi feladatra 2 pont jár.
- A ZH és házi feladat pontszámok összege alapján lesz megállapítva a gyakorlati jegy.

Pótlás, javítás, gyakUV:

- A vizsgaidőszak elején lehetőség lesz a ZH-k pótlására, javítására. Bővebben később.
- Az érvénytelen ZH-(ka)t kötelező újraírni.

Személyes adatok:

Név: Bondici László

E-mail: bondici@cs.elte.hu

Feladatok

1. Legyen Z standard normális eloszlású valószínűségi változó. Számoljuk ki a momentumgeneráló és a karakterisztikus függvényét.

2. Legyen $(W_t)_{t\geq 0}$ Wiener-folyamat. Számoljuk ki a következő valószínűségi változók szórásnégyzetét:

$$a) \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{W_s^2}{8}} dW_s; \qquad\qquad b) \int\limits_0^1 \sqrt{s}\mathrm{e}^{W_s} dW_s.$$

3. Legyen $(W_t)_{t\geq 0}$ Wiener-folyamat. Fejezzük ki az

$$\int\limits_0^t \arctan(W_s) dW_s$$

sztochasztikus integrált az Itô-formula segítségével.

4. Legyen $(W_t)_{t\geq 0}$ Wiener-folyamat és

$$Z_t = \begin{cases} \phi(1-t, W_t) & 0 \leq t < 1, \\ 0 & 1 \leq t < \infty \end{cases},$$

ahol $\phi(s,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}}, \qquad (s > 0, x \in \mathbb{R}).$

Mutassuk meg, hogy Z_t olyan folytonos trajektóriájú lokális martingál, ami nem martingál. (Útmutatás: Írjuk fel az Itô-formulát a folyamatra a $[0,1)$ időintervallumon.)

5. Számítsuk ki a következő integrál értékét, $t \geq 0$:

$$\int_0^t \int_0^{x_n} \cdots \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} dx_n.$$

6. Legyen Z standard normális eloszlású valószínűségi változó. Célunk $E(f(Z))$ meghatározása az Itô-formula segítségével néhány speciális $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ választás mellett:

$$f(x) = x^{2k}\ (k \in \mathbb{Z}, k \geq 0); \qquad f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\ (\alpha \in \mathbb{R}); \qquad f(x) = \cos(\alpha x)\ (\alpha \in \mathbb{R}).$$

   Ehhez legyen $(W_t)_{t\geq 0}$ Wiener-folyamat, és írjuk fel az Itô-formulát az $(f(W_t))_{t\geq 0}$ folyamatra. Indokoljuk meg, hogy a megjelenő lokális martingál valódi martingál, majd vegyünk várható értéket mindkét oldalon.

7. Legyen $(W_t)_{t\geq 0}$ Wiener-folyamat. Definiáljuk továbbá $n \geq 0$ egészekre az $(I_t^{(n)})_{t\geq 0}$ folyamatokat a következő rekurzióval:

$$I_t^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0, \\ \int_0^t I_s^{(n-1)} dW_s, & \text{ha } n \geq 1. \end{cases}$$

   a) Milyen n-ekre martingál $(I_t^{(n)})_{t\geq 0}$?
   b) Számoljuk ki $(I_t^{(n)})_{t\geq 0}$ várható érték- és szórásnégyzetfüggvényét.
   c) Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ és $t \geq 0$ esetén legyen

   $$X_t^{(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n I_t^{(n)}.$$

   Milyen értelemben konvergens az iménti sor?
   d) Mutassuk meg, hogy minden $t \geq 0$ esetén fennáll a következő összefüggés:

   $$X_t^{(\lambda)} = 1 + \lambda \int_0^t X_s^{(\lambda)} dW_s.$$

Házi feladat

1. Legyen $(W_t)_{t\geq 0}$ Wiener-folyamat és $\lambda \in \mathbb{R}$. Legyen továbbá $\varepsilon > 0$ esetén

$$X_\varepsilon = \int_0^1 \varepsilon^{-\lambda} \mathrm{e}^{-\frac{W_s^2}{2\varepsilon}} dW_s.$$

   Mutassuk meg, hogy X_ε pontosan akkor tart 0-hoz L^2-ben, midőn $\varepsilon \to 0$, ha $\lambda < \frac{1}{4}$.